

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
516
G94a2

MATHEMATICS LIBRARY

Return this book on or before the **Latest Date** stamped below. A charge is made on all overdue books.

University of Illinois Library

July 18 '45

M32

(15) R

1446 Vol 1 — Dup

APPLICATION DE L'ALGEBRE A LA GEOMETRIE,

OU

METHODE

DE DÉMONTRER PAR L'ALGEBRE, les Theorêmes de Geometrie, & d'en résoudre & construire tous les Problêmes.

L'on y a joint une Introduction qui contient les Regles du Calcul Algebrique.

Par Feu Monsieur GUISNÉE *de l'Academie Royale des Sciences, Professeur Royal de Mathematique, & ancien Ingenieur ordinaire du Roy.*

Seconde Edition, revûe, corrigée & considérablement augmentée par l'Auteur.



THE LIBRARY OF THE
JUN 18 1926
UNIVERSITY OF ILLINOIS



A PARIS,

Chez QUILLAU, Imprimeur-Juré Libraire de l'Université, rue Galande, près la place Maubert, à l'Annonciation.

M. DCC. XXXIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Hist. of Sci.
Gonnelli
4-7-26
12573

516
G94a2
MATHEMATICS LIBRARY



PREFACE.



A premiere Edition de l'Ouvrage que l'on donne ici au Public parut en 1710. Il avoit été composé par Feu Monsieur Guisnée quelques années auparavant, pour des personnes de qualité, qui s'appliquoient à la science que l'on y traite. L'Auteur n'avoit point alors le dessein de le donner au Public. Mais un de ceux pour qui il avoit été écrit, l'ayant jugé plus propre que tous les Ouvrages de même nature qui l'ont précédé, pour instruire ceux qui veulent s'appliquer aux Mathematiques, & en traiter toutes les parties algebriquement, voulut bien faire la dépense de l'impression par le seul motif de leur faire plaisir.

Puisse un si bel exemple se multiplier en France, & y trouver bien des imitateurs. Les sciences & les beaux Arts y reprendroient bientôt le lustre qu'elles n'ont peut-être déja que trop perdu. Au lieu de tant de livres frivoles qui ne font qu'amuser inutilement,

604305

& ſouvent même gâter l'eſprit & le cœur, bien des Ouvrages ſçavans en tout genre, qu'on eſt obligé de laiſſer perir dans les ténébres, verroient le jour ; on en entreprendroit beaucoup d'autres auſquels on n'oſe penſer, faute de pouvoir eſperer de les voir jamais paroître, & les eſprits ſeroient animés au travail, & excités au goût de la veritable & de la ſolide érudition.

Le généreux Promoteur de la premiere Edition de ce Livre, eut bientôt la ſatisfaction de voir le jugement qu'il en avoit porté hautement confirmé par l'approbation de tous les connoiſſeurs, & le public ne put déclarer d'une maniere plus authentique & plus éclatante qu'il déclara d'abord, & l'eſtime qu'il faiſoit de l'Ouvrage, & la reconnoiſſance qu'il avoit pour celui dont les liberalités le lui avoient procuré. En effet on le rechercha avec ardeur, on le lut avec plaiſir & avec profit, & cette premiere Edition conſommée, on n'a ceſſé de le redemander au Libraire avec empreſſement. Auſſi eſt-ce le meilleur Traité qui ait paru en France ſur les matieres qui en font l'objet. Methode, préciſion, clarté rien n'y manque.

On y explique le plus ſimplement que l'on peut, les Methodes de démontrer par l'Algebre, tous les Theorêmes de Geometrie, & de réſoudre, & conſtruire tous les Problêmes déterminez & indéterminez, geometriques & méchaniques. En un mot, on explique tous les uſages qu'on peut faire de l'Algebre commune, dans toutes les parties des

Mathematiques, pourvû qu'on exprime par des lignes les grandeurs qu'elles ont pour objet; & on ne ſuppoſe pour cela que les ſimples élémens de la Géometrie ordinaire.

L'on y ſuppoſoit auſſi d'abord la connoiſſance du Calcul algebrique, parcequ'il ſe trouve expliqué dans pluſieurs Livres imprimez: mais pluſieurs perſonnes ayant crû qu'il ſeroit plus à propos d'en donner les Régles, & de les joindre à l'Ouvrage en forme d'Introduction, que de renvoyer le Lecteur, qui n'en aura point encore de connoiſſance, à d'autres Ouvrages; l'Auteur ſuivit leur avis, & y ajouta cette Introduction, où il explique toutes les opérations algebriques, les proprietez des raports, ou fractions, des proportions, & des équations.

On y a établi un principe général pour démontrer toujours de la même maniere tous les Theorêmes qu'on peut former ſur la grandeur conſiderée généralement; & ce principe eſt le même que l'on trouve auſſi dans la troiſiême Section de l'Application de l'Algébre à la Geometrie, pour en démontrer les Theorêmes.

L'on trouvera auſſi des Regles particulieres pour multiplier & diviſer, les unes par les autres, les puiſſances qui renferment les mêmes lettres, pour les élever à d'autres puiſſances, & pour en extraire les racines. En donnant ces Regles Mr Guiſnée, n'eut pas ſeulement pour objet ſon propre Ouvrage, il crut de plus qu'elles ne ſeroient peut-être pas inutiles pour entendre avec plus de facilité,

plusieurs endroits de l'Excellent Livre de l'*Analyse des infinimens Petits* de feu *Monsieur le Marquis de l'Hôpital*, qu'il avoit aussi eu en vûe dans l'Application de l'Algebre à la Geometrie. On y trouvera en effet expliquez tous les endroits de l'Analyse qui dépendent de l'Algebre & de la Geometrie ordinaire, & dans lesquels cet illustre Auteur n'a pas jugé à propos de mettre tout au long, ou de poursuivre des operations dont il suppose son Lecteur capable.

M. Guisnée a divisé cet Ouvrage en douze Sections, qu'il a rangées selon leur ordre dans la Table qui suit, où il indique ce qui est contenu dans chacune.

Dans la premiere Section, il a parlé des équations déterminées, & indéterminées, des racines de leurs inconnues, & de leurs usages; & pour ne pas faire des répétitions inutiles, il a crû devoir omettre dans l'Introduction, ce qu'il en a dit en cet endroit. Il a aussi mis dans cette Section, des observations pour nommer les lignes qui doivent servir à la résolution d'un Problême, pour tirer celles qu'il est nécessaire de tirer, pour trouver plus facilement des équations; & il a cru ces observations d'un si grand secours, qu'il conseilloit non-seulement de les bien entendre, mais même de les apprendre par cœur.

Comme les équations, qui servent à construire les Problêmes, en renferment toutes les conditions, & toutes les qualitez, on a accoutumé d'en dé-

montrer la conſtruction par l'Analyſe, en retirant les mêmes équations des proprietez des Courbes qu'on y employe. Mais cette Methode n'ayant aucune difficulté, il jugea plus à propos de démontrer à la maniere des Anciens la conſtruction de la plûpart des Problêmes déterminez qu'il réſout, quoiqu'elle ait été tirée de l'Analyſe, afin de faire voir la différence qu'il y a entre l'une & l'autre maniere. Mais quant à la conſtruction des Problêmes indéterminez, qui n'eſt autre choſe que la deſcription des Courbes dont on a les équations, il n'y a point d'autre voye naturelle pour la démontrer, que l'Analyſe.

Les Sections coniques étant d'un grand uſage dans la Geometrie, il jugea à propos d'en démontrer par l'Analyſe, dans la 4, 5, 6 & 7e Section, les principales proprietez, & principalement celles dont il prévoyoit avoir beſoin pour la conſtruction des Problêmes. Il les a d'abord conſidérées dans le Cone, parcequ'elles y ont pris leur origine & leur nom, & pour faire voir que celles que l'on trouve décrites ſur des Plans dans la 5, 6 & 7e Section, ſont précisément les mêmes que celles que l'on coupe dans le Cone.

Telle étoit la premiere Edition de cet Ouvrage; celle-ci l'emportera beaucoup ſur elle. Il s'étoit gliſſé des fautes dans celle-là. L'Auteur les avoit corrigées ſur un Exemplaire qu'il avoit.

De plus, ſoit que ſes propres réflexions, ou l'expérience de ceux qui s'étoient ſervis de ſon Livre,

lui eût appris que malgré toute ſa netteté & ſa juſteſſe, bien des endroits pouvoient arrêter des Lecteurs encore peu initiez aux myſteres de l'Algebre, qu'il avoit omis des détails de preuves néceſſaires aux commençans, ou paſſé des Operations qu'il leur étoit difficile de ſuppléer, ou de faire eux-mêmes, ou qu'il leur étoit du moins plus commode de trouver toutes faites, il avoit ajouté ces preuves & ces opérations ſur les marges de ſon Exemplaire, aux endroits où il les avoit crus néceſſaires.

Heureuſement cet Exemplaire eſt revenu au Libraire qui penſoit à donner cette ſeconde Edition. Ainſi on la trouvera enrichie des corrections & des augmentations que M. Guiſnée lui-même a faites, & qui montent pour les additions à près de quarante, ſouvent conſidérables & toujours très-utiles à la perfection de l'Ouvrage, & propres à le rendre plus lumineux, & à diminuer le travail de ceux qui le liſent. On les a placées toutes très-exactement aux endroits marquez par les renvois de l'Auteur, & afin que les figures qu'il a auſſi dans ſes augmentations, ajoutées aux anciennes, ſe trouvaſſent de ſuite & en leur rang, & par conſéquent plus facilement & plus commodément, on a fait graver de nouveau toutes les planches, & l'on y a placé ces nouvelles figures, au lieu & au nombre qui leur convient: dépenſe conſidérable; mais qu'on n'a point voulu épargner pour un ouvrage auſſi bon & auſſi utile que celui-ci, & pour lequel on n'a plaint ni les frais, ni le travail.



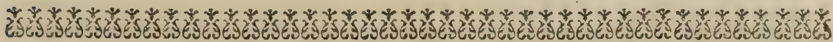
TABLE DES SECTIONS.

AVERTISSEMENT

POUR LES CITATIONS.

LEs Articles ſont marquez par les chiffres Romains I, II, III, *&c.* & les n^os^. par les chiffres Arabes. Par exemple, pour trouver cette citation, Art. 4. n°. 6, il faut chercher la page, où l'on trouve le chiffre Romain IV, & enſuite le chiffre Arabe 6, qui n'en eſt pas beaucoup éloigné. Pour une plus grande facilité, voici la Table des Articles.

TABLE DES ARTICLES.



APPROBATION.

J'Ai lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier, le préſent Manuſcrit, & j'ai crû que la méthode & la clarté de cet Ouvrage, le rendroient fort utile. Fait à Paris ce 15 Juillet 1704.

Signé, FONTENELLE.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE; à nos Amez & Feaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT; notre bien amé GABRIEL-FRANÇOIS QUILLAU, Fils Imprimeur & Libraire-Juré de l'Univerſité de Paris; Nous ayant fait remontrer qu'il ſouhaiteroit continuer à réimprimer, ou faire réimprimer & donner au public, un Ouvrage qui a pour titre: *Application de l'Algebre à la Geometrie;* S'il nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de continuation de Privilege ſur ce neceſſaires; offrant pour cet effet de le réimprimer, ou faire réimprimer en bon papier & beaux caracteres, ſuivant la feuille imprimée & attachée pour modele, ſous le contreſcel de ces Préſentes. A CES CAUSES, voulant traiter favorablement ledit Expoſant; Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire réimprimer ledit Ouvrage ci-deſſus ſpécifie, en un ou pluſieurs Volumes, conjointement ou ſéparément & autant de fois que bon lui ſemblera, ſur papier & caracteres conformes à ladite feuille imprimée & attachée pour modele ſous notre-

dit contrescel, de le vendre, faire vendre, & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de huit années consécutives, à compter du jour de la d ae desdites Présentes; Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Imprimeurs, Libraires & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit Ouvrage ci-dessus exposé. en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit d'augmentation, correction, changement de titre ou autrement, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de quinze cens livres d'amende, contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & intérêts: A la charge que ces Présentes seront enrégistrées tout au long sur le Régistre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelle; que l'Impression de cet Ouvrage sera faite dans notre Royaume & non ailleurs; Et que l'Impetrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dixiéme Avril 1725, & qu'avant que de l'exposer en vente, le Manuscrit ou Imprimé qui aura servi de copie à l'Impression dudit Ouvrage, sera remis dans le même état ou l'approbation y eura été donnée, és mains de notre très-cher & Feal le Sieur CHAUVELIN, Chevalier, Garde des Sceaux de France, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & Feal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur CHAUVELIN, le tout à peine de nullité des Présentes, du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Exposant, ou ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la Copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux Copies collationnées par l'un de nos Amez & Feaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'Original: Commandons au premier notre Huissier ou Sergent, de faire pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & necessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraires: Car tel est notre plaisir. Donné à Paris le vingt-quatriéme jour du mois d'Octobre, l'an de grace mil sept cens vingt-sept, & de notre Regne le treiziéme. Par le Roy en son Conseil.

DE SAINT HILAIRE.

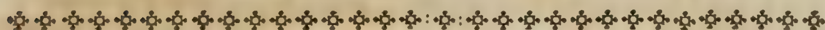
Registré sur le Registre VI *de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris*, n°. 728, fol. 591. *Conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du* 28 *Fevrier* 1723. *A Paris le trente-un Octobre, mil sept cens vingt-sept.*

BRUNET, Syndic

INTRODUCTION



INTRODUCTION A L'APPLICATION DE L'ALGEBRE A LA GEOMETRIE.



DEFINITIONS.

I. L'ALGEBRE eſt l'Art de faire ſur les lettres de l'Alphabet, les operations que l'on fait ſur les nombres, c'eſt-à-dire, l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diviſion & les Extractions de racines.

L'on ſe ſert des lettres de l'Alphabet préferablement à d'autres caracteres arbitraires, dont on pourroit également ſe ſervir, tant parcequ'on les connoît & qu'on les écrit avec plus d'habitude que tous autres caracteres, que parceque ces lettres ne ſignifiant rien d'elles-mêmes, on peut s'en ſervir pour exprimer tout ce qu'on voudra.

Ce qui fait qu'on ne peut pas tirer le même avantage des caracteres Arithmetiques & des Nombres, que des

lettres dans l'application de l'Algebre à tous ſes uſages, c'eſt 1°. qu'après avoir fait quelques-unes des operations dont on vient de parler ſur les lettres, on en connoît non ſeulement le réſultat, mais on connoît & on diſtingue en même tems toutes les quantitez qu'il renferme ; ce qui n'eſt point de même dans les réſultats des mêmes operations faites ſur les nombres.

2°. Que les quantitez inconnues entrent dans le calcul auſſi-bien que les connues, & que l'on opere avec la même facilité ſur les unes que ſur les autres.

3°. Que les Démonſtrations que l'on fait par le calcul algebrique ſont generales, & qu'on ne ſçauroit rien prouver par les nombres que par induction.

C'eſt préciſément en ces trois choſes que conſiſte le grand avantage qu'on tire du calcul algebrique dans ſon application à toutes les parties des Mathematiques, qu'on en démontre tous les Theorêmes, & qu'on en réſout tous les Problêmes avec autant de facilité qu'il y auroit de difficulté à faire les mêmes choſes ſelon la maniere des Anciens.

On s'eſt accoutumé à employer les premieres lettres de l'Alphabet a, b, c, d, &c. pour exprimer les quantitez connues, & les dernieres m, n, p, q, r, $ſ$, t, u, x, y, z pour exprimer les inconnues.

1. Outre les lettres qu'on employe dans l'Algebre, il y a encore quelques autres ſignes qui ſervent pour marquer les operations que l'on fait ſur les mêmes lettres. Ce ſigne $+$, ſignifie *plus*, & eſt la marque de l'Addition. Ainſi $a+b$, marque que b eſt ajoutée avec a.

Ce ſigne —, ſignifie *moins*, & eſt la marque de la Souſtraction. Ainſi $a-b$, marque que b eſt ſouſtraite de a.

Celui-ci $\times$, ſignifie *fois*, ou *par*, & eſt la marque de la multiplication. Ainſi $a \times b$, marque que a & b, ſont multipliées l'une par l'autre.

On néglige très-ſouvent ce ſigne, parcequ'on eſt convenu que lorſque deux ou pluſieurs lettres ſont jointes enſemble ſans aucun ſigne qui ſépare ces lettres, où les

quantitez qu'elles expriment, ſont multipliées, par exemple ab marque aſſez que a & b ſe multiplient : mais on s'en ſert toujours pour marquer que deux quantitez exprimées par des lettres majuſcules de l'Alphabet, ſe multiplient. Ainſi $AB \times CD$; marque que la grandeur exprimée par AB eſt multipliée par la grandeur exprimée par CD. On employe encore le ſigne de multiplication en d'autres occaſions qu'on trouvera dans la ſuite.

Ce ſigne $=$, ſignifie *égal*, & marque qu'il y a égalité entre les quantitez qui le précedent, & celles qui le ſuivent. Ainſi $a = b$ marque que a eſt egale à b.

Celui-ci $>$ ſignifie *plus grand*. Ainſi $a > b$ marque que a ſurpaſſe b.

Celui-ci $<$ ſignifie *plus petit*. Ainſi $a < b$, marque que a eſt moindre que b.

Celui-ci ∞ ſignifie *infini*. Ainſi $x = \infty$, marque que x eſt une quantité infiniment grande.

2. Les lettres de l'Alphabet ſont nommées *quantitez algebriques*, lorſqu'on les employe pour exprimer des grandeurs ſur leſquelles on veut operer.

3. Les quantitez algebriques ſont nommées *ſimples*, *incomplexes* ou *monomes*, lorſqu'elles ne ſont point liées enſemble par les ſignes $+$ & $-$; a, ab, $\frac{aa}{b}$ *&c.* ſont des quantitez incomplexes.

4. Elles ſont nommées *compoſées*, ou *complexes*, ou *polynomes*, lorſqu'elles ſont liées enſemble par les ſignes $+$ & $-$; $a + b$, $ab + bb$, $ab - bc + cd$, $\frac{aa + bb}{d}$, ſont des quantitez complexes.

5. Les parties des quantitez complexes diſtinguées par les ſignes $+$ & $-$ ſont nommées *termes*. $ab + bc - cd$, eſt une quantité complexe, qui renferme trois termes, ab, bc & cd. Il y a quelques remarques à faire ſur le mot de *terme* qu'on trouvera ailleurs.

6. Les quantitez complexes qui n'ont que deux termes ſont nommées *binomes*; celles qui en ont trois, *trinomes*, &c.

7. Les quantitez incomplexes qui ſont précedées du

ſigne +, ou plutôt qui ne ſont précedées d'aucun ſigne (car les quantitez incomplexes, & les premiers termes des quantitez complexes qui ne ſont précedées d'aucun ſigne ſont ſuppoſées être précedées du ſigne +) ſont nommées *poſitives*, & celles qui ſont précedées du ſigne — *négatives*; d'où il ſuit que les quantitez complexes ſont poſitives, lorſque les termes qui ont le ſigne + ſurpaſſent ceux qui ont le ſigne —; négatives, lorſque les termes précedez du ſigne — ſurpaſſent ceux qui ſont précedez du ſigne +.

8. Les quantitez incomplexes, & les termes des quantitez complexes qui contiennent les mêmes lettres ſont nommées *ſemblables*. $2abc$ & abc ſont des quantitez incomplexes ſemblables; $3aab - 2aab + 4abb$ eſt une quantité complexe qui renferme deux termes ſemblables $3aab$ & $-2aab$; le troiſiéme terme $4abb$, n'a point de ſemblable.

9. Pour s'appercevoir plus facilement de la ſimilitude des quantitez algebriques, il faut toujours écrire les premieres lettres de l'Alphabet les premieres, & les autres dans leur ordre, c'eſt-à-dire par exemple, qu'au lieu d'écrire *bac*, ou *cab*, il faut écrire *abc*.

10. Les nombres qui précedent les quantitez algebriques ſont nommez *coefficiens*.

Dans cette quantité $aa + 3ab + 4bb$, 3 & 4 ſont les coefficiens des termes $3ab$, & $4bb$. L'on prend l'unité pour coefficient des quantitez qui ne ſont précedées d'aucun nombre, & quoique l'on n'ait point accoutumé de l'écrire, on la doit neanmoins toujours ſuppoſer. Ainſi aa doit être regardée comme s'il y avoit $1aa$.

REDUCTION

Des quantitez complexes algebriques à leurs plus ſimples expreſſions.

11. IL faut ajouter les coefficiens des termes ſemblables, lorſqu'ils ont le même ſigne + ou —, & donner à la ſomme le même ſigne: & lorſqu'ils ont differens ſignes,

il faut soustraire les plus petits coefficiens des plus grands, & donner au reste le signe du plus grand. Ainsi $3ab + 2ab$ étant réduite, devient $5ab$; $4ac + 4ab - 6ab$ devient $4ac - 2ab$; $3a - 5a$ devient $-2a$; $3abc - abc$, ou $3abc - 1abc$, devient $2abc$. Il en est ainsi des autres.

Dans tous les calculs algebriques, il ne faut jamais laisser de termes semblables sans être réduits.

ADDITION

Des quantitez algebriques incomplexes & complexes.

12. IL n'y a qu'à les écrire de suite, ou au-dessous les unes des autres avec leurs signes, & réduire ensuite les termes semblables, & l'on aura la somme des quantitez qu'il falloit ajouter ensemble. Ainsi pour ajouter $3ab - 4bc + 5cd$ avec $2ab - 3cd$, l'on écrira $3ab - 4bc + 5cd + 2ab - 3cd$, qui se réduit à $5ab - 4bc + 2cd$. Pour ajouter $5abc - 4bcd$ avec $5abd - 8abc + 6bcd$, l'on écrira $5abc - 4bcd + 5abd - 8abc + 6bcd$, qui se réduit à $5abd - 3abc + 2bcd$. Pour ajouter $6a - 3b$ avec $2a + 3b$, l'on écrira $6a - 3b + 2a + 3b$, qui se réduit à $8a$. Il en est ainsi des autres.

SOUSTRACTION

Des quantitez algebriques incomplexes & complexes.

13. IL n'y a qu'à les écrire de suite, ou au-dessous l'une de l'autre en changeant tous les signes de celles qui doivent être soustraites; & l'on aura après la réduction des termes semblables, la difference des quantitez proposées.

Pour soustraire $3a - 2b + 3c$ de $5a - 3b - 5c$, l'on écrira $5a - 3b - 5c - 3a + 2b - 3c$, qui se réduit à $2a - b - 8c$. Pour soustraire $3ab - 2bc + 2cd$ de $5ab - 4bc + + 2cd$, l'on écrira $5ab - 4bc + 2cd - 3ab + 2bc - 2cd$, qui se réduit à $2ab - 2bc$. Il en est ainsi des autres.

MULTIPLICATION

Des quantitez algebriques incomplexes, & de leurs puissances.

14. ON eſt convenu que pour multiplier deux ou pluſieurs lettres, il n'y a qu'à les écrire de ſuite ſans aucun ſigne qui les ſépare, & l'on aura le produit cherché. Ainſi pour multiplier *a* par *b*, l'on écrira *ab*. Pour multiplier *ab* par *ac*, l'on écrira *aabc*. Il en eſt ainſi des autres.

Il y a ſouvent des nombres, ou coefficiens qui précedent les quantitez algebriques qu'il s'agit de multiplier; il faut auſſi avoir égard à leurs ſignes. Voici la regle qu'il faut ſuivre.

15. On multipliera les coefficiens, enſuite les lettres, & on donnera au produit le ſigne + ſi les deux quantitez ſont précedées du même ſigne + ou —, & on lui donnera le ſigne —, ſi l'une des quantitez eſt précedée du ſigne + & l'autre du ſigne —.

Pour multiplier $3a$ par $2b$, on dira trois fois deux font ſix, *a* par *b* fait ou donne, ou eſt égal à *ab*; ainſi l'on aura $6ab$ pour le produit de $3a \times 2b$. De même $3ab \times - 2ab = - 6aabb$. $- 3ab \times - 2cd = + 6abcd$. $5ab \times cd$, ou $1cd = 5abcd$. $aab \times abb = aaabbb$, ou a^3b^3 : car lorſque la même lettre ſe trouve plus de deux fois dans un produit, on l'écrit ſeulement une fois, & l'on écrit à ſa droite un caractere arithmetique qui exprime combien de fois cette lettre doit être écrite. Ainſi pour *aaaa*, l'on écrira a^4; pour *aaabbb*, l'on a écrit $a^3 b^3$; on peut auſſi pour *aa* écrire a^2; pour *bb*, b^2, &c.

DÉFINITION.

16. LE caractere arithmetique qui marque combien de fois une lettre doit être écrite dans un produit, eſt nommé *expoſant*. Ainſi dans $a^3 b^4$, 3 eſt l'expoſant de *a*, & 4, celui de *b*; dans a^3b, 3 eſt l'expoſant de *a*, & 1 l'expoſant de *b* : car quand une lettre eſt ſeule, ou qu'elle ne doit être écrite qu'une fois dans un produit, on doit ſuppoſer

qu'elle a pour exposant l'unité, quoiqu'on ne l'écrive point. Ainsi a exprime la même chose que a^1, ou $1a^1$, a^3b, la même que a^3b^1, &c.

REMARQUE.

17. DE même que la multiplication de deux lignes droites engendre ou produit un rectangle, ou un quarré, si elles sont égales ; la multiplication de trois lignes droites, un parallelépipéde, ou solide ; ou un cube, si elles sont égales : par la même raison les Algebristes appellent rectangle algebrique, le produit de deux lettres differentes, comme ab ; quarré algebrique, le produit d'une lettre par elle-même, comme aa ou a^2 ; solide algebrique, le produit de trois lettres differentes comme abc, ou aab ; cube algebrique, le produit d'une lettre multipliée consécutivement deux fois par elle-même, comme aaa, ou a^3, ou b^3. Mais ils n'en demeurent pas là, & quoiqu'il n'y ait point dans la nature de solide qui ait plus de trois dimensions, ils ne laissent pas que d'en imaginer d'algebriques dont le nombre de dimensions va à l'infini, comme a^3, a^4, a^5, a^6, a^3b, $aabb$, a^3bb, a^3b^3, &c. Et ces quantitez algebriques sont d'autant plus composées, que le nombre de leurs dimensions est grand ; de sorte qu'un produit algebrique qui a quatre dimensions, est plus composé que celui qui n'en a que trois ; celui qui en a trois, est plus composé que celui qui n'en a que deux, &c. Et le nombre des dimensions d'un produit algebrique est égal au nombre d'unitez que contient la somme des exposans des quantitez qui le forment. Par exemple, a^3b est un produit de quatre dimensions, parceque 3 exposant de a, $+ 1$ exposant de $b = 4$. a^3b^4 est un produit de sept dimensions, parceque $3 + 4 = 7$. Il en est ainsi des autres.

Ils appellent *puissance*, ou degré, le produit d'une quantité algebrique multipliée par elle-même une fois, deux fois, trois fois, & ainsi à l'infini. Ainsi a, ou a^1 est le premier degré, ou la premiere puissance de a ; aa ou a^2,

le second degré, ou la seconde puissance, ou le quarré de *a*; a^3, le troisiême degré, ou la troisiême puissance ou le cube de *a*; a^4, le quatriême degré, ou la 4e puissance, ou le quarré quarré de *a*; a^5, le cinquiême degré, ou la 5e puissance, ou le quarré cube de *a*; a^6, le sixiême degré, ou la sixiême puissance, ou le cube cube de *a*; a^7, le septiême degré, ou la septiême puissance de *a*, & ainsi à l'infini, d'où l'on voit que les puissances tirent leur nom de leurs exposans.

18. Une puissance peut aussi être regardée comme le produit de deux puissances, ou comme la puissance d'une autre puissance : ainsi a^6 peut être regardée comme le produit de $a^2 \times a^4$, ou comme la seconde puissance de a^3, ou comme la troisiême de a^2.

19. Il y a aussi des puissances faites du produit de deux ou plusieurs lettres multipliées l'une par l'autre : ainsi *aabb*, est la seconde puissance de *ab*; ou a^3b^6, la troisiême puissance de *abb*. Il en est ainsi des autres.

DE'FINITION.

20. SI deux quantitez differentes, ou égales forment un produit ou une puissance, ces quantitez sont nommées *côtez* ou *racines* de ce produit ou de cette puissance. Ainsi *a* & *b* sont les côtez, ou les racines de *ab*; *a* le côté ou la racine de *aa*, &c.

FORMATION

Des puissances des quantitez incomplexes.

IL est évident (no. 17) que pour élever une quantité incomplexe à une puissance donnée, il n'y a qu'à multiplier cette quantité par elle-même autant de fois moins une que l'exposant de la puissance donnée contient d'unitez. Ainsi pour élever *ab* à la troisiême puissance, il faut multiplier *ab* deux fois par elle-même, ce qui donnera a^3b^3. Il en est ainsi des autres.

22.

22. D'où il est aisé de voir qu'on peut faire la même chose d'une maniere plus courte, en multipliant les Exposans de la grandeur donnée par l'Exposant de la puissance à laquelle on veut élever cette grandeur. Ainsi la 3e puissance de *ab*, ou $a^1 b^1$ est $a^{1\times3} b^{1\times3} = a^3 b^3$; la 4e puissance de a^3 est $a^{3\times4} = a^{12}$; la 3e puissance de aab^3, ou $a^2 b^3$ est $a^{2\times3} b^{3\times3} = a^6 b^9$; la 3e puissance de $-a$, ou $-a^1$ est $-a^{1\times3} = -a^3$; la quatriéme puissance de $-a$ ou $-a^1$ est $-a^{1\times4} = -a^4$, & en general la puissance n de a^m est a^{mn}. La puissance n de $-a^m$ est $\pm a^{mn}$, selon que n signifie un nombre pair, ou impair.

23. Il est clair (n°. 14, & 15) que pour multiplier un produit ou une puissance par un autre produit, ou par une autre puissance où se trouvent les mêmes lettres, il n'y a qu'à ajouter leurs Exposans. Ainsi $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$; $a^2 b^2 \times a^2 b^3 = a^{2+2} b^{3+2} = a^4 b^5$; $a^3 \times a^{-5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $a^3 \times a^{-3} = a^{3-3} = a^0 = 1$. On verra dans la suite (art. 2. n°. 33.) pourquoi $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, & pourquoi $a^0 = 1$.

MULTIPLICATION

Des quantitez complexes algebriques, & de la Formation de leurs puissances.

REGLE.

24. ON multipliera tous les termes de l'une des quantitez par chacun de ceux de l'autre, en observant les Regles prescrites n°. 14, & 15, & l'on aura le produit total que l'on réduira (n°. 11.) à sa plus simple expression.

EXEMPLES.

25. SOIT la quantité $A.\ a + 2b - c.$
à multiplier par $B.\ 2a + 3b.$

Produits particuliers. $\begin{cases} C.\ 2aa + 4ab - 2ac. \\ D.\ \quad + 3ab + 6bb - 3bc. \end{cases}$

Produit total. $E.\ 2aa + 7ab - 2ac + 6bb - 3bc.$

Le premier terme $2a$ de la quantité B multipliant tous les termes de la quantité A donnera la quantité C.

Le ſecond terme $3b$ de la quantité B, multipliant tous les termes de la quantité A donnera la quantité D; & ayant fait la réduction des deux quantitez C & D, l'on aura la quantité E qui ſera le produit des deux quantitez A & B. Donc $\overline{a + 2b - c} \times \overline{2a + 3b} = 2aa + 7ab - 2ac + 6bb - 3bc.$

26. Soit la quantité $A.\ aa + bb.$
à multiplier par $B.\ aa - bb.$

Produits particuliers. $\begin{cases} C.\ a^4 + aabb. \\ D.\ \quad - aabb - b^4. \end{cases}$

Produit total. $E.\ a^4 - b^4.$

Le premier terme aa de la quantité B, multipliant la quantité A produit la quantité C. Le 2e terme $-bb$ de la quantité B multipliant la quantité A produit la quantité D, & en réduiſant les produits particuliers C & D, l'on a le produit total E. Donc $\overline{aa + bb} \times \overline{aa - bb} = a^4 - b^4.$

27. On ſe contente quelquefois pour exprimer la multiplication de deux quantitez complexes, d'écrire entre deux le ſigne de multiplication.

Ainſi pour multiplier $a + b$ par $a - b$, l'on écrit $a + b \times a - b$, ou $\overline{a + b} \times \overline{a - b}$. Il en eſt ainſi des autres.

FORMATION

Des puiſſances des quantitez complexes.

28. POUR élever une quantité complexe à une puiſſance donnée, il faut, comme pour les quantitez incomple-

xes, la multiplier consécutivement autant de fois moins une que l'exposant de la puissance donnée contient d'unitez. Ainsi pour élever $a+b$, à la 3e puissance, il faut (nº. 24.) multiplier $a+b$ par $a+b$, ce qui donne $aa+2ab+bb$, qui étant encore multipliée par $a+b$, donne $a^3+3aab+3abb+b^3$, qui est la 3e puissance, ou le cube de $a+b$. Il en est ainsi des autres.

On peut abreger l'operation lorsqu'il s'agit d'élever un polynome au quarré.

29. On écrira le quarré du premier terme + ou — deux fois le rectangle ou produit du premier par le second, + le quarré du second; & ces trois termes seront le quarré cherché, si c'est un binome. Mais si c'est un trinome, on écrira encore + ou — deux fois le produit des deux premiers par le troisiême + le quarré du troisiême. Si c'est un quadrinome, on écrira encore + ou — deux fois le produit des trois premiers par le quatriéme. + le quarré du quatriéme, & ainsi de suite. Ainsi le quarré de $a-b+c$ est $aa-2ab+bb+2ac-2bc+cc$.

On a mis ici cette abréviation, parceque l'on a très-souvent besoin de cette operation dans l'application de l'Algebre à la Geometrie.

Voici une abréviation plus considerable pour élever un binome à une puissance quelconque.

30. L'on écrira au premier terme la premiere lettre du binome élevée à la puissance donnée; au second la même lettre élevée à une puissance plus basse de l'unité, & multipliée par la seconde lettre; au troisiême, la même lettre élevée à une puissance encore plus basse de l'unité & multipliée par le quarré de la seconde; & ainsi de suite, en abaissant à chaque terme la puissance de la premiere lettre de l'unité, & élevant au contraire celle du second de l'unité, jusqu'à ce que l'on arrive au terme, où la même premiere lettre n'aura qu'une dimension qui sera le pénultiéme; & l'on écrira au dernier terme la seconde lettre élevée à une puissance égale à celle du premier. Ainsi

pour élever $a \pm b$ à la quatriême puiſſance, l'on écrira ; $A.\ a^4 \pm a^3b + aabb \pm ab^3 + b^4$. Si le binome eſt tout poſitif, tous les termes de la puiſſance auront le ſigne $+$; ſi la ſeconde lettre eſt négative, les termes où elle ſe trouvera élevée à une puiſſance impaire, ou dont l'expoſant eſt un nombre impair, auront le ſigne $-$, & tous les autres le ſigne $+$, comme on voit dans la puiſſance A.

Il reſte encore à trouver les coefficiens ; en voici la Méthode.

On donnera au ſecond terme pour coefficient l'expoſant du premier ; on multipliera le coefficient du ſecond par l'expoſant que la premiere lettre a du binome a au même ſecond & le produit diviſé par 2, ſera le coefficient du troiſiême. De même, le coefficient du troiſiême multiplié par l'expoſant que la premiere lettre a au même troiſiême ; & le produit diviſé par 3, ſera le coefficient du quatriême ; & ainſi de ſuite. De maniere que le coefficient d'un terme quelconque multiplié par l'expoſant que la premiere lettre du binome a dans le même terme, & le produit diviſé par le nombre qui marque le lieu que ce même terme occupe dans l'ordre des termes de la puiſſance, eſt le coefficient du terme ſuivant. Ainſi la 4e puiſſance du binome $a \pm b$ entierement formée eſt,

$a^4 \pm 4a^3b + 6aabb \pm 4ab^3 + b^4$. Il en eſt ainſi des autres.

S'il y a quelque nombre entier ou rompu qui précede l'un des deux, ou tous les deux termes du binome, on multipliera le coefficient de chaque terme de la puiſſance par une puiſſance de ce nombre égale à celle où la lettre qu'il précede y eſt élevée. Ainſi pour élever $a + 2b$ à la 3e puiſſance, l'on y élevera premierement $a + b$, & l'on aura $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, l'on multipliera enſuite les coefficiens des termes où b ſe rencontre par la puiſſance de 2 égale à celle où b y eſt élevée, c'eſt-à-dire que l'on multipliera $3aab$ par 2, $3abb$ par 4, & b^3 par 8, & l'on aura $a^3 + 6aab + 12abb + 8b^3$, qui ſera le cube de $a + 2b$.

On peut auſſi élever par les mêmes regles un binome quelconque $p+q$ à une puiſſance indéterminée m (m ſignifie un nombre quelconque entier ou rompu, poſitif ou négatif) qui ſera,

$$p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} p^{m-4} q^4, \&c.$$

Où l'on voit que la premiere lettre p du binome a pour expoſant dans tous les termes, m moins un nombre entier; c'eſt pourquoi ſi ce nombre entier ſe trouve dans quelqu'un égal à m, l'expoſant de p y ſera $=0$; & par conſéquent $p=1$, & ce terme ſera le dernier de la puiſſance m du binome $p+q$. Mais ſi ce nombre entier ne ſe trouve jamais $=m$, la puiſſance m du binome $p+q$ pourra être continuée à l'infini.

31. Le binome $p+q$ élevé à la puiſſance m, comme on vient de faire, peut ſervir de formule generale, pour élever un binome, ou un polynome quelconque à une puiſſance donnée.

Soit par exemple $2ax-xx$ qu'il faut élever à la 3e puiſſance. Ayant ſuppoſé $2ax=p$, $-xx=q$, & $m=3$, l'on ſubſtituera à la place de p, de q, & de m, leurs valeurs $2ax$, $-xx$, & 3; & en la place des puiſſances de p & de q, les puiſſances égales de leurs valeurs $2ax$ & $-xx$, & l'on aura $8a^3x^3 - 12aax^4 + 6ax^5 - x^6$ pour la puiſſance cherchée: car m devient $=3$ au quatriême terme de la Formule. De même pour élever $a+b-c$ à la troiſiême puiſſance. Ayant ſuppoſé $a=p$, $b-c=q$, & $m=3$, l'on aura après les ſubſtitutions $a^3 + 3aab + 3abb + b^3 - 3aac - 6abc + 3acc - 3bbc + 3bcc - c^3$. Il en eſt ainſi des autres.

32. On ſe contente quelquefois pour élever un polynome à une puiſſance donnée, d'écrire à ſa droite l'expoſant de la puiſſance à laquelle on le veut élever. Ainſi pour élever $\underline{a+b}$ au quarré, on écrit $\overline{\underline{a+b}}^{2}$; pour l'éle-

ver au cube, l'on écrit $\overline{a+b}^{3}$; & en general, pour élever $a+b$ à la puiſſance m, l'on écrit $\overline{a+b}^{m}$. m ſignifie un nombre quelconque entier ou rompu, poſitif ou négatif.

33. Il eſt clair que pour élever une puiſſance quelconque d'un polynome, formée comme on vient de dire, à une puiſſance donnée, il n'y a qu'à multiplier l'expoſant de l'une par l'expoſant de l'autre. Ainſi pour élever $\overline{a+b}^{2}$ à la 3e puiſſance, l'on écrira $\overline{a+b}^{2\times 3} = \overline{a+b}^{6}$. pour élever $\overline{a+b}^{m}$ au quarré, ou à la 2e puiſſance, l'on écrira $\overline{a+b}^{2m}$. Pour élever $\overline{a+b}^{m}$ à la puiſſance n, l'on écrira $\overline{a+b}^{mn}$. Il en eſt ainſi des autres.

34. Il eſt encore évident que pour multiplier deux puiſſances de la même quantité complexe, formées comme on a dit n°. 32. il n'y a qu'à ajouter enſemble leurs expoſans. Ainſi pour multiplier $\overline{a+b}^{2}$ par $\overline{a+b}^{3}$, l'on écrira $\overline{a+b}^{2+3} = \overline{a+b}^{5}$; $\overline{a+b-c}^{2} \times \overline{a+b-c}^{-5} = \overline{a+b-c}^{2-5} = \overline{a+b-c}^{-3}$; $\overline{a-b}^{m} \times \overline{a-b}^{n} = \overline{a-b}^{m+n}$; $\overline{a+b}^{m} \times \overline{a+b}^{-n} = \overline{a+b}^{m-n}$; $\overline{a+b}^{m} \times \overline{a+b}^{-m} = \overline{a+b}^{m-m} = \overline{a+b}^{0} = 1$.

DIVISION

Des quantitez algebriques incomplexes & complexes.

Regle Generale.

35. ON écrira le diviſeur au-deſſous du dividende en forme de fraction, & l'on prendra cette fraction pour le quotient de la diviſion. En effet, puiſque toute diviſion numerique exprimée, comme on vient de dire, eſt égale à ſon quotient, par exemple $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{15}{3} = 5$, & qu'elle peut par conſequent être priſe pour ſon quotient ; il en doit être de même des diviſions algebriques. Ainſi

pour diviſer ab par c, l'on écrira $\frac{ab}{c}$; pour diviſer $aa+bb$ par $c+d$, l'on écrira $\frac{aa+bb}{c+d}$; &c.

36. Mais comme il eſt toujours neceſſaire de réduire les quantités algebriques à leurs plus ſimples expreſſions lorſqu'il eſt poſſible, & que les diviſions, ou fractions dont on vient de parler, n'y ſont pas toujours réduites, il faut donner les regles neceſſaires pour cet effet.

Il y a differentes manieres, ou plutôt, il y a des cas où il faut operer d'une certaine maniere; d'autres, où il faut operer d'une autre maniere pour réduire les fractions, ou les diviſions à leurs plus ſimples termes. Nous ne donnerons à preſent que le cas où l'operation eſt celle qu'on a toujours nommée diviſion; les autres ſe trouveront ailleurs.

DIVISION

Des quantités incomplexes.

37. Il eſt évident (nº. 14 & 15) que lorſque le dividende eſt le produit du diviſeur par une autre quantité quelconque, le quotient ſera le dividende, après en avoir effacé le diviſeur. Ainſi le quotient de ab diviſé par a eſt b, c'eſt-à-dire que $\frac{ab}{a}=b$; le quotient de abc diviſé par ab eſt c, c'eſt-à-dire que $\frac{abc}{ab}=c$; de même $\frac{a^3}{aa}=a$; $\frac{a^3bb}{aab}=ab$. Il en eſt ainſi des autres.

Il y a ſouvent des nombres autres que l'unité qui précedent ou le dividende, ou le diviſeur, & quelquefois tous les deux. Il faut auſſi avoir égard aux ſignes. Voici la regle qu'il faut obſerver.

38. On diviſera par les regles de la diviſion numerique, le nombre qui précede le dividende par celui qui précede le diviſeur, & (nº. 37), les lettres du dividende par celles du diviſeur, & l'on donnera au quotient le ſigne + ſi le dividende & le diviſeur ont tous deux le même

signe + ou —; & si l'un a + & l'autre —, l'on donnera au quotient le signe —. Ainsi le quotient de $12ab$ par $3a$ est $4b$: car $\frac{12}{3} = 4$, & $\frac{ab}{a} = b$, & partant $\frac{12ab}{3a} = 4b$. De même $\frac{12abc}{-4ac} = -3b$; $\frac{-15a^3bb}{3aab} = -5ab$; $\frac{-12a^3bb}{-3ab} = 4aab$. Il en est ainsi des autres.

39. Si le dividende & le diviseur sont semblables, & égaux, le quotient sera l'unité. Ainsi $\frac{a}{a} = 1$; $\frac{12ab}{12ab} = 1$. Ce qui suit de ce que toute quantité se mesure, ou se contient elle-même une fois.

40. Il arrive souvent que les nombres se peuvent diviser, & que les lettres ne se peuvent pas diviser; & au contraire, auquel cas il faut diviser ce qui se peut diviser, & laisser le reste en fraction. Ainsi $\frac{12ab}{3c} = \frac{4ab}{c}$; $\frac{8abc}{3ab} = \frac{8c}{3}$.

41. Lorsque ni les nombres, ni les lettres ne se peuvent diviser, on écrit le diviseur au dessous du dividende en forme de fraction; & c'est en ce cas qu'il est necessaire de prendre cette fraction pour le quotient de la division. Ainsi pour diviser a par b, l'on écrira $\frac{a}{b}$; pour diviser $3ab$ par $2c$, l'on écrira $\frac{3ab}{2c}$; pour diviser $-2ab$ par $3c$, l'on écrira $\frac{-2ab}{3c}$, ou $\frac{2ab}{-3c}$; pour diviser $5ab$ par $-2c$ l'on écrira $\frac{5ab}{-2c}$, ou $\frac{-5ab}{2c}$; pour diviser $-4ab$ par $-3c$, l'on écrira $\frac{-4ab}{-3c}$, ou $\frac{4ab}{3c}$. On trouvera ailleurs la raison des changemens de signes que l'on vient de faire.

Si l'on multiplie le quotient d'une division par le diviseur, il viendra la quantité à diviser : car la multiplication, & la division ont des effets contraires, aussi-bien que l'addition & la soustraction.

42. Il est clair (n°. 21 & 37) que pour diviser une puissance

ſance quelconque d'une quantité incomplexe par une puiſſance quelconque de la même quantité, il n'y a qu'à ſouſtraire l'expoſant du diviſeur de l'expoſant du dividende. Ainſi $\frac{a^3}{aa} = a^{3-2} = a$; $\frac{a^4 b^3}{a^3 b} = a^{4-3} b^{3-1} = abb$; $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} =$ (n°. 23) 1 ; $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$; $\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = 1$, &c.

DIVISION

Des quantitez complexes.

43. LORSQUE le dividende eſt le produit du diviſeur par quelqu'autre quantité, il eſt clair que la diviſion ſe fera toujours exactement auſſi bien que celle des quantitez incomplexes.

Or il eſt ſouvent aiſé de voir ſi une quantité que l'on veut diviſer par une autre quantité, eſt le produit de la quantité qui doit être le diviſeur par une troiſiême quantité ; & alors le quotient ſera cette troiſiême quantité. Ainſi $ax - bx$ diviſée par $a - b$, donne au quotient x: car $ax - bx$ eſt le produit de $a - b \times x$; & $ax - bx$ diviſée par x, donne au quotient $a - b$. Pareillement $\frac{aaxx - bbxx}{aa - bb} = xx$, & $\frac{aaxx - bbxx}{xx} = aa - bb$, &c.

44. Lorſqu'on ne peut pas aiſément voir ſi une quantité complexe peut être diviſée par une autre quantité complexe, il faut l'examiner par la regle qui ſuit, qui eſt celle qu'on appelle diviſion.

45. Pour faire plus facilement la diviſion des quantitez complexes, on examine dans les deux quantitez que l'on veut diviſer l'une par l'autre, quelle eſt la lettre qui ſe trouve le plus fréquemment avec des dimenſions differentes ; & l'on écrit dans l'une & dans l'autre quantité le terme, où cette lettre a plus de dimenſions, le premier, & enſuite les autres termes, ſelon l'ordre des puiſſances de la même lettre. Quelques-uns appellent cette lettre, lettre dominante.

REGLE.

46. ON écrit le diviſeur à la gauche du dividende ; & ſuivant les regles de la diviſion des quantitez incomplexes, on diviſe le premier terme du dividende par le premier du diviſeur, & l'on écrit le réſultat, ou quotient à la droite du dividende. On multiplie tous les termes du diviſeur par le quotient ; & l'on ſouſtrait le produit du dividende, ce qui ſe fait (nº. 13) en écrivant le même produit au-deſſous du dividende avec des ſignes contraires ; & on fait enſuite la réduction, en regardant le dividende & ce produit comme une ſeule quantité.

On diviſe de nouveau les quantitez qui viennent après la réduction par le même diviſeur, ce qui donne un nouveau terme au quotient ; & on acheve cette ſeconde operation comme on a fait la premiere. On réitere encore la même operation autant de fois qu'il eſt néceſſaire, ou juſqu'à ce que la réduction devienne nulle, ou égale à zero ; ce qui arrive toujours lorſque la quantité à diviſer eſt le produit du diviſeur par une troiſiême quantité, qui eſt le quotient de la diviſion. Les exemples éclairciront la regle.

EXEMPLE I.

47. SOIT $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ à diviſer par $a - b$. Ayant écrit le dividende & le diviſeur comme on vient de dire, l'on opere en cette ſorte en prenant a pour la lettre dominante.

Diviſeur.		*Dividende.*	*Quotient.*
$a - b$		$a^3 - 3aab + 3abb - b^3$	$aa - 2ab + bb.$
Prod.		$-a^3 + aab$	
1re Rédu.	A	$0 - 2aab + 3abb - b^3$	
Produit.		$+ 2aab - 2abb$	
2e Rédu.	B	$0 + abb - b^3$	
Produit.		$- abb + b^3$	
3e Rédu.	C	$0 \quad 0.$	

Le premier terme $+a^3$ du dividende divisé par le premier $+a$ du diviseur donne pour quotient $+aa$, & multipliant le diviseur $a-b$ par le quotient $+aa$, l'on a a^3-aab, & ayant écrit $-a^3+aab$ au-dessous du dividende, & fait la Réduction, l'on aura la quantité A, que j'appelle premiere Réduction.

Le premier terme $-aab$ de la premiere Réduction A divisé par le premier $+a$ du diviseur, donne pour quotient $-2ab$, & multipliant le diviseur $a-b$ par le nouveau terme du quotient $-2ab$, l'on a $-2aab+2abb$; & ayant écrit $+2aab-2abb$ au-dessous de la premiere Réduction A, l'on aura la seconde Réduction B.

Le premier terme $+abb$ de la seconde Réduction B, divisé par le premier $+a$ du diviseur donne pour quotient $+bb$; & multipliant le diviseur $a-b$ par $+bb$, l'on a $+abb-b^3$; & ayant écrit $-abb+b^3$ au-dessous de la seconde Réduction, l'on aura zero pour la troisiême Réduction, qui marque que la division est faite, & par consequent que $\frac{a^3-3aab+3abb-b^3}{a-b}=aa-2ab+bb.$

EXEMPLE II.

48. *Diviseur.*	*Dividende.*	*Quotient.*
$aa-ab+cd.$	$a^4-aabb+2abcd-ccdd$	$aa+ab-cd.$
Produit.	$-a^4+a^3b-aacd$	
Premiere Réd.	$0+a^3b-aabb-aacd+2abcd-ccdd$	
Produit.	$-a^3b+aabb\quad -abcd$	
Seconde Réd.	$0\quad 0-aacd+abcd-ccdd$	
Produit.	$+aacd-abcd+ccdd$	
Troisiême Réduction.	$0\quad 0\quad 0$	

Donc $\frac{a^4-aabb+2abcd-ccdd}{aa-ab+cd}=aa+ab-cd.$

EXEMPLE III.

49. *Diviseur.* *Dividende.* *Quotient.*

$$yy - aa - bb. \left\{ \begin{array}{l} y^6 + aay^4 + b^4yy - a^6 \\ -2bby^4 - a^4yy - 2a^4bb \\ \qquad\qquad\qquad - aab^4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y^4 + 2aayy + a^4 \\ - bbyy + aabb. \end{array}$$

Produit. $\left\{ \begin{array}{l} -y^6 + aay^4 \\ \qquad + bby^4 \end{array} \right\}$

1[re] Réduction. $\left\{ \begin{array}{l} 0 + 2aay^4 + b^4yy - a^6 \\ - bby^4 - a^4yy - 2a^4bb \\ \qquad\qquad\qquad - aab^4 \end{array} \right\}$

Produit. $\left\{ \begin{array}{l} -2aay^4 + 2a^4yy \\ \qquad\qquad + 2aabbyy \end{array} \right.$

2[e] Réduction. $\left\{ \begin{array}{l} -bby^4 + b^4yy - a^6 \\ \qquad + a^4yy - 2a^4bb \\ \qquad + 2aabbyy - aab^4 \end{array} \right\}$

Produit. $\left\{ \begin{array}{l} + bby^4 - aabbyy \\ \qquad - b^4yy \end{array} \right\}$

3[e] Réduction. $\left\{ \begin{array}{l} 0 \quad + a^4yy - a^6 \\ \quad + aabbyy - 2a^4bb \\ \qquad\qquad - aab^4 \end{array} \right\}$

Produit. $\left\{ \begin{array}{l} - a^4yy \quad + a^6 \\ \qquad\qquad + a^4bb \end{array} \right\}$

4[e] Réduction. $\left\{ \begin{array}{l} + aabbyy - a^4bb \\ \qquad\qquad - aab^4 \end{array} \right\}$

Produit. $\left\{ \begin{array}{l} - aabbyy + a^4bb \\ \qquad\qquad + aab^4 \end{array} \right\}$

5[e] Réduction. $0 \quad 0$

Donc

$$\frac{\begin{array}{l} y^6 + aay^4 + b^4yy - a^6 \\ -2bby^4 - a^4yy - 2a^4bb \\ \qquad\qquad\qquad - aab^4 \end{array}}{yy - aa - bb} = \begin{array}{l} y^4 + 2aayy + a^4 \\ - bbyy + aabb. \end{array}$$

EXEMPLE IV.

50. *Diviseur.* *Dividende.* *Quotient.*

$3xx - aa.$	$9x^4 + 12ax^3 - 4a^3x - a^4$	$3xx + 4ax + aa.$
Produit.	$-9x^4 + 3aaxx$	
1re Réduction.	$0 + 12ax^3 + 3aaxx - 4a^3x - a^4$	
Produit.	$-12ax^3 \qquad + 4a^3x$	
2e Réduction.	$0 \quad + 3aaxx - a^4$	
Produit.	$-3aaxx + a^4$	
3e Réduction	$0 \quad 0$	

Donc $\frac{9x^4 + 12ax^3 - 4a^3x - a^4}{3xx - aa} = 3xx + 4ax + aa.$

51. Il y a des divisions qui ne se font qu'en partie, ce qui arrive lorsqu'il vient une Réduction où toutes les lettres du diviseur ne se trouvent plus, ou bien ne s'y trouvent point dans l'état & dans l'ordre qu'elles gardent dans le diviseur : & en ce cas, l'on écrit le diviseur au-dessous de la derniere Réduction, ce qui forme une fraction que l'on ajoute au Quotient, comme on va voir dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE V.

52. *Diviseur.* *Dividende.* *Quotient.*

$ac - dd.$	$aabc + ac^3 - abdd - ccdd + d^4$	$ab + cc.$
Produit.	$-aabc \qquad + abdd$	
1re Rédu.	$-0 + ac^3 \quad 0 \quad - ccdd + d^4$	
Produit.	$-ac^3 \qquad + ccdd$	
2e Réduction.	$0 \qquad 0 + d^4$	

Donc $\frac{aabc + ac^3 - abdd - ccdd + d^4}{ac - dd} = ab + cc + \frac{d^4}{ac - dd}.$

53. Il y a des divisions que l'on pourroit continuer, même à l'infini, quoique tous les termes du diviseur ne se trouvent point dans la derniere Réduction : mais le Quotient deviendroit plus composé, & la division de-

viendroit inutile ; c'eſt pourquoi, dans ces ſortes de diviſions, il en faut demeurer à l'endroit, où le Quotient eſt le plus ſimple qu'il puiſſe être.

54. Il arrive auſſi fort ſouvent que les coeficiens, ou les nombres qui précedent les termes, ou quelqu'un des termes du dividende, ou du diviſeur, empêchent que la diviſion ne ſe faſſe, quand même toutes les lettres ſeroient dans l'une & dans l'autre diſpoſées de maniere que la diviſion ſe pût faire.

55. Il y a auſſi des diviſions qui ne ſe peuvent point du tout faire ; ce qui arrive lorſqu'aucun des termes du diviſeur ne ſe trouve point tout entier dans aucun de ceux du dividende : & alors on écrit le diviſeur au-deſſous du dividende, ce qui forme une fraction que l'on prend pour le Quotient de la diviſion, comme on a dit n°. 34.

L'on a ſouvent beſoin de connoître tous les diviſeurs d'un nombre donné, & d'une quantité algébrique donnée pour choiſir celui d'entr'eux qui convient à de certaines operations que l'on eſt obligé de faire ; c'eſt pourquoi nous en allons donner ici la Méthode.

METHODE
Pour trouver tous les Diviſeurs d'un nombre donné.

56. IL faut diviſer le nombre donné par 2, s'il eſt poſſible, & autant de fois qu'il eſt poſſible ; enſuite diviſer le dernier Quotient par 3, s'il eſt poſſible, & autant de fois qu'il eſt poſſible ; de même par 5, par 7, par 9, *&c.* juſqu'à ce que le dernier Quotient ſoit l'unité, ou que le diviſeur devienne le nombre propoſé, auquel cas, il n'a aucun diviſeur que lui-même ; & ayant écrit dans une rangée de haut en bas tous les diviſeurs dont on s'eſt ſervi, on multipliera le premier diviſeur par le 2e, & on écrira le produit à la droite du 2e. On multipliera enſuite les deux premiers diviſeurs, & le produit qu'on a déja trouvé par le troiſiême diviſeur, & l'on écrira les Produits vis-à-vis le même troiſiême diviſeur ; on multipliera de même tout ce qui eſt au-deſſus du 4e divi-

ſeur par le même 4[e] diviſeur, & l'on écrira les Produits à ſa droite, & ainſi de ſuite, & tous ces Produits ſeront autant de diviſeurs du nombre propoſé.

EXEMPLE.

SOIT le nombre 150 dont il faut trouver tous les diviſeurs.

Je diviſe 150 par 2, & j'écris le Quotient 75 au-deſſous de *A*, & le diviſeur 2 au-deſſous de *B*;

A	B
150	2.
75	3. 6.
25	5. 10. 15. 30.
5	5. 25. 50. 75. 150.
1	

Je diviſe 75 par 3, & j'écris le Quotient 25, & le diviſeur 3 ſous *A*, & ſous *B*; je diviſe 25 par 5, & j'écris le Quotient 5, & le diviſeur 5, ſous *A* & ſous *B*; je diviſe 5, par 5, & j'écris le Quotient 1, & le diviſeur 5 ſous *A*, & ſous *B*. Cela fait, je multiplie le premier diviſeur 2 par le ſecond 3, & j'écris le Produit 6 à côté de 3. Je multiplie tout ce qui eſt au-deſſus du 3[e] diviſeur 5 par lui-même, & j'écris les Produits 10, 15, 30, à ſa droite; enfin je multiplie tout ce qui eſt au-deſſus du 4[e] diviſeur 5, par lui-même, & j'écris les Produits 25, 50, 75, & 150; (car on néglige 10, 15 qui s'y trouve déja) comme on les voit. Il eſt clair que tous ces nombres qui ſont du côté de *B* peuvent diviſer ſans reſte, le nombre donné 150.

57. C'eſt la même regle pour les quantitez algebriques. Soit par exemple, la quantité $a^3 + aabb$, dont il faut trouver tous les diviſeurs.

A	B
$a^3b + aabb.$	$a.$
$aab + abb.$	$a. \quad aa.$
$ab + bb.$	$b. \quad ab. \quad aab.$
$a + b$	$a + b. \; aa + ab. \; a^3 + aab. \; ab + bb. \; aab + abb. \; a^3b + aabb.$
$1.$	

Je diviſe $a^3b + aabb$ par a, & j'écris le Quotient $aab + abb$,

ſous A, & le diviſeur a ſous B. Je diviſe $aab + abb$ encore par a, & j'écris le Quotient $ab + bb$, & le diviſeur a ſous A, & ſous B. Je diviſe $ab + bb$ par b, & j'écris le Quotient $a + b$, & le diviſeur b ſous A, & ſous B. Enfin je diviſe $a + b$ par $a + b$; & j'écris le Quotient 1, & le diviſeur $a + b$, ſous A & ſous B. J'acheve l'operation comme celle des nombres, & je trouve tous les diviſeurs de la quantité $a^3 + aabb$ au-deſſous de B.

RESOLUTION

Des puiſſances, ou de l'extraction des racines des quantitez algebriques.

58. EXTRAIRE la racine d'une puiſſance, ou d'une quantité algebrique, c'eſt trouver, par une operation contraire à celle de la formation des puiſſances, une quantité plus ſimple que la propoſée, qui étant multipliée par elle-même autant de fois qu'il eſt neceſſaire, produiſe la puiſſance ou la quantité propoſée.

Il y a autant de ſortes de racines qu'il y a de puiſſances, & l'on donne à chaque racine le nom de la puiſſance à laquelle elle ſe rapporte. Ainſi la quantité qu'il ne faut multiplier qu'une fois par elle-même pour produire la quantité ou la puiſſance dont elle eſt la racine, eſt nommée *racine quarrée*, ou ſeconde racine; celle qu'il faut multiplier deux fois par elle-même, pour produire la puiſſance dont elle eſt la racine, eſt appellée *racine cube*, ou troiſiême racine; celle qu'il faut multiplier trois fois, eſt nommée *racine quarrée quarrée*, ou quatriéme racine; celle qu'il faut multiplier quatre fois *racine quarrée cube*, ou cinquiéme racine; celle qu'il faut multiplier cinq fois, *racine cube cube*, ou ſixiême racine, *&c.*

On ſe ſert de ce caractere $\sqrt{}$ qu'on appelle *ſigne radical*, pour ſignifier le mot de *racine*: mais pour le déterminer à ſignifier une telle racine, on y joint l'expoſant de la puiſſance à laquelle ſe rapporte la racine en queſtion, & cet expoſant eſt alors appellé expoſant du ſigne radical. Ainſi $\sqrt[2]{}$, ou ſimplement $\sqrt{}$, ſignifie racine

cine quarrée, ou ſeconde racine; $\sqrt[3]{}$, ſignifie racine cube, quatriême racine, *&c.* De ſorte que $\sqrt{ab}$, ou $\sqrt{aa+bb}$, $\sqrt{aa+2ab+bb}$, ſignifie qu'il faut extraire la racine quarrée de ab, ou de $aa+bb$, ou de $aa+2ab+bb$, &c.

Il y a des quantitez dont la racine propoſée s'extrait exactement; d'autres, dont on ne la peut extraire qu'en partie; & d'autres, dont on ne la peut point du tout extraire.

59. Les quantitez dont on ne peut extraire exactement la racine, & qu'on eſt obligé d'exprimer par le moyen du ſigne radical, ſont nommées, *ſourdes* ou *irrationnelles*, & celles qui ne ſont affectées d'aucun ſigne radical, ſont nommées *rationnelles*. Ainſi $\sqrt{ab}$, $\sqrt{aa+bb}$, ſont des quantitez irrationnelles, parceque l'on n'en peut pas extraire la racine quarrée; $\sqrt[3]{aab}$ eſt une quantité irrationnelle, parceque l'on n'en peut pas extraire la racine cube, *&c.*

EXTRACTION

Des racines des quantitez incomplexes.

60. **P**UISQUE (n°. 22.) pour élever une quantité incomplexe à une puiſſance donnée, il faut multiplier les expoſans de cette quantité par l'expoſant de la puiſſance propoſée; il eſt clair que pour extraire la racine propoſée d'une quantité incomplexe, il n'y a qu'à diviſer les expoſans de cette quantité par l'expoſant du ſigne radical convenable; ou ce qui revient au même, multiplier les expoſans de la quantité propoſée par une fraction dont le numerateur ſoit l'unité, & le dénominateur ſoit l'expoſant du ſigne radical dont il s'agit, c'eſt-à-dire, par $\frac{1}{2}$, s'il s'agit de la racine quarrée; $\frac{1}{3}$, s'il s'agit de la racine cube; $\frac{1}{4}$, s'il s'agit de la racine quarrée quarrée, *&c.* car les dénominateurs 2, 3 & 4 ſont les expoſans des ſi-

gnes radicaux $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, *&c.* L'on rend par-là l'operation de l'extraction des racines, ſemblable à celle de la formation des puiſſances, & l'on a des expoſans pour les racines auſſi bien que pour les puiſſances: car $\frac{1}{2}$ eſt l'expoſant de la racine quarrée; $\frac{1}{3}$, l'expoſant de la racine cube; $\frac{1}{4}$, l'expoſant de la racine quarrée quarrée, *&c.* & l'on peut par conſequent énoncer l'extraction des racines, en diſant qu'il faut élever une quantité donnée à la puiſſance $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, *&c.* au lieu de dire qu'il en faut extraire la racine quarrée, cube, quarrée quarrée, *&c.*

Si après la multiplication des expoſans de la quantité propoſée par les fractions dont on vient de parler, les expoſans qui ſont alors fractionnaires, ſe peuvent tous réduire en entier, la racine propoſée ſera une quantité rationnelle; ſi une partie de ces expoſans ſe peut réduire en entier, & que l'autre partie demeure fractionnaire, la racine ne ſera extraite qu'en partie, & l'on mettra la partie rationnelle devant le ſigne radical, & la partie irrationnelle après; ſi tous ces expoſans demeurent fractionnaires, la racine ne ſera point extraite, & l'on ſe contentera de mettre le ſigne radical devant la quantité propoſée; enfin ſi les expoſans fractionnaires qui ne peuvent être réduits en entier ſurpaſſent l'unité, la puiſſance de la lettre dont ils ſont expoſans, ſera en partie rationnelle, & en partie irrationnelle. Il faudra operer ſur les coéficiens, comme ſur les lettres, en y employant les extractions numeriques des racines, & la Méthode de trouver tous les diviſeurs d'un nombre, expliquée nº. 56. Tout ce qu'on vient de dire ſera éclairci par les Exemples qui ſuivent.

EXEMPLES.

61. SOIT $a^2 b^4 c^6$ dont il faut extraire la racine quarrée, ou qu'il faut élever à la puiſſance $\frac{1}{2}$; ayant multi-

plié les exposans 2, 4 & 6 par $\frac{1}{2}$, l'on aura $a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{4}{2}} c^{\frac{6}{2}}$, ou ab^2c^3 après avoir réduit les exposans fractionnaires en entier, de sorte que $\sqrt{a^2b^4c^6} = ab^2c^3$, ce qui est évident. De même, $\sqrt{a^2b} = ab^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{b}$: car a est la racine de aa, ou a^2, & $b^{\frac{1}{2}}$ est la même chose que $\sqrt{b}$; $\sqrt{ab} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$; c'est-à-dire que $\sqrt{ab}$ est une quantité toute irrationnelle ; $\sqrt{a^3b} = a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} =$ (n°. 23.) $a^1 a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{ab}$; $\sqrt{72\, a^3b^3} = 6ab\sqrt{2ab}$: car il est clair par les Exemples précedens, que $\sqrt{a^3b^3} = ab\sqrt{ab}$, & je démontre que $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ en cette sorte. Si l'on cherche (n°. 56.) tous les diviseurs de 72, & qu'on examine tous les quarrez qui s'y rencontrent (s'il s'agissoit de la racine cube, il faudroit examiner tous les cubes, & ainsi des autres racines) on trouvera que 36 est le plus grand. Or $\frac{72}{36} = 2$ & $36 \times 2 = 72$; c'est pourquoi $\sqrt{72}$ peut être regardée comme le produit de $\sqrt{36} \times \sqrt{2}$: mais $\sqrt{36} = 6$; donc $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$, & partant $\sqrt{72\, a^3b^3} = 6ab\sqrt{2ab}$. On trouvera de même que $\sqrt{12aab} = 2a\sqrt{3b}$, & que $\sqrt{6aabc} = a\sqrt{6bc}$; parceque 6 ne peut être divisé par aucun quarré. Il en est ainsi des autres.

EXTRACTION

Des racines des Polynomes.

62. LA Méthode d'extraire les racines des Polynomes, selon la maniere ordinaire, est semblable à celle d'extraire la racine des nombres.

EXEMPLE I.

SOIT la quantité $aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$, dont il faut extraire la racine quarrée.

Diviseurs.	*Quantité proposée.*	*Racine, ou Quot.*
	$aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc.$	$(a + b + c.$
	$- aa,$	
1. $2a + b.$	$A.\ 0 + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$	
	$- 2ab - bb$	
2. $2a + 2b + c.$	$B.\ 0 \quad 0 + 2ac + 2bc + cc$	
	$- 2ac - 2bc - cc$	
	$C. \quad 0 \quad 0 \quad 0$	

Je dis, le premier terme aa eſt un quarré, dont la racine eſt a que j'écris au Quotient, & je ſouſtrais le quarré de a qui eſt aa du premier terme aa de la quantité propoſée, en l'écrivant au-deſſous avec le ſigne —. Je réduis à la maniere de la diviſion la quantité propoſée, & le quarré ſouſtrait, & j'écris la Réduction A au-deſſous d'une ligne.

Je double le Quotient a, ce qui me donne $2a$ que j'écris à la gauche de la Réduction A, & qui fait partie du premier diviſeur. Je diviſe le premier terme $+ 2ab$ de la quantité A par $2a$; ce qui me donne $+ b$ que j'écris au Quotient, & à la droite du diviſeur $2a$, & j'ai le premier diviſeur complet $2a + b$ que je multiplie par le nouveau Quotient b, & j'ai plus $2ab + bb$ que je ſouſtrais de la quantité A, en l'écrivant au-deſſous avec des ſignes contraires, & la Réduction de ces deux quantitez me donne la quantité B. Je double le Quotient $a + b$, & j'ai $2a + 2b$ pour une partie du nouveau diviſeur que j'écris à la gauche de B. Je diviſe de nouveau le premier terme $2ac$ de la quantité B par $+ 2a$, ce qui me donne $+ c$ que j'écris au Quotient, & à la droite du nouveau diviſeur $2a + 2b$; ce qui fait $2a + 2b + c$ pour le ſecond diviſeur complet. Je multiplie ce ſecond diviſeur $2a$

$+2b+c$ par le nouveau Quotient c, & j'ai $2ac+2bc+cc$ que j'écris au-deſſous de la quantité B avec des ſignes contraires ; & réduiſant ces deux quantitez je trouve zero pour la troiſiême Réduction ; d'où je conclus que l'operation eſt achevée, & que par conſequent, $\sqrt{aa+2ab+bb+2ac+2bc+cc}=a+b+c$.

EXEMPLE II.

SOIT la quantité $9aa-12ab+4bb$ dont il faut extraire la racine quarrée.

Diviſeurs.	*Quantité propoſée.*	*Racine, ou Quotient.*
	$9aa-12ab+4bb.$	$(3a-2b.$
	$-9aa$	
$6a-2b.$	$A.\ 0\ \ -12ab+4bb$	
	$+12ab-4bb$	
	$B.\ \ 0\ \ 0$	

Le premier terme $9aa$ étant un quarré dont la racine eſt $3a$; j'écris $3a$ au Quotient, & ſon quarré $9aa$ au-deſſous de $9aa$ avec le ſigne $-$, & la premiere Réduction eſt la quantité A. Je double le Quotient $3a$, ce qui me donne $6a$, qui ſont partie du premier diviſeur, & que j'écris à la gauche de la quantité A. Je diviſe $-12ab$ par $+6a$, ce qui me donne $-2b$ que j'écris au Quotient & à la droite de $6a$, j'ai par ce moyen le diviſeur complet $6a-2b$. Je multiplie $6a-2b$ par $-2b$, ce qui me donne $-12ab+4bb$, & j'écris $+12ab-4bb$ au-deſſous de la quantité A. Je réduis ces deux dernieres quantitez, & la Réduction B qui ſe trouve égale à zero, fait voir que la quantité propoſée eſt un quarré dont la racine eſt $3a-2b$, c'eſt-à-dire, que $\sqrt{9aa-12ab+4bb}=3a-2b$.

S'il venoit une Réduction qui ne pût être diviſée par le double du Quotient, ce ſeroit une marque que la quantité propoſée ne ſeroit point quarrée ; & il faudroit alors ſe contenter de la mettre ſous le ſigne radical. Par

exemple, si on vouloit extraire la racine quarrée de $aa + bb$, l'on trouveroit que la racine de aa est a : mais on ne pourroit diviser la Réduction bb par $2a$, ce qui feroit voir que $aa + bb$, n'est point un quarré; c'est pourquoi il faudroit se contenter d'en exprimer la racine en cette sorte $\sqrt{aa + bb}$. Il en est ainsi des autres.

Au reste, il est aisé de connoître par la formation des puissances, ou lorsqu'on a un peu d'habitude dans le calcul algebrique, si une quantité proposée est quarrée, ou cube, &c. & d'en extraire par consequent la racine sans le secours d'aucune operation, ou par la seule inspection des termes de la quantité proposée.

63. Mais sans cela, & sans le secours des Regles que nous venons de donner, l'on peut avec toute la facilité possible extraire toutes sortes de racines, quarrées, cubes, quarrées quarrées, &c. par le moyen de la formule generale proposée n°. 30 : car pour cela il n'y a qu'à regarder les quantitez dont on veut extraire une racine quelconque, comme des quantitez qu'il faut élever à une puissance dont l'exposant soit celui de la racine qu'on veut extraire, c'est-à-dire, que cet exposant soit $\frac{1}{2}$, si c'est la racine quarrée; $\frac{1}{3}$, si c'est la racine cube; $\frac{1}{4}$, si c'est la racine quarrée quarrée, &c. ce qui est facile en suivant ce qui est prescrit n°. 31, comme on va voir par les Exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

SOIT la quantité $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ dont il faut extraire la racine cube, ou ce qui est la même chose, qu'il faut élever à la puissance $\frac{1}{3}$.

Ayant fait $a^3 = p$, $-3aab + 3abb - b^3 = q$, & mettant ces valeurs de p & de q dans les deux premiers termes, $p^m + mp^{m-1}q$ de la formule generale proposée n°.

30; (car les autres termes ſont inutiles, lorſque les racines qu'on veut extraire, ſont rationnelles;) l'on aura $a^{3m} + ma^{3m-3} \times \overline{-3aab + 3abb - b^3}$, & faiſant encore $m = \frac{1}{3}$, l'on aura $a^{1} + \frac{1}{3}a^{-2} \times \overline{-3aab + 3abb - b^3}$, ou $a - a^{-2+2}b + a^{-2+1}bb - \frac{1}{3}a^{-2}b^3$: mais parceque le ſecond terme $-a^{-2+2}b = -a^{0}b = -1b = -b$; le troiſième & quatrième termes ſont nuls. Ainſi l'on a $a - b$ pour la racine cherchée, c'eſt-à-dire, que

$\overline{a^3 - 3aab + 3abb - b^3}^{\frac{1}{3}}$; ou $\sqrt[3]{a^3 - 3aab + abb - b^3}$ $= a - b$.

Exemple II.

Soit la quantité $aa + 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc$ dont il faut extraire la racine quarrée, ou qu'il faut élever à la puiſſance $\frac{1}{2}$.

Ayant fait aa ou $a^2 = p$, $+ 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc = q$, & mettant ces valeurs de p & de q dans les deux premiers termes de la Formule $p^{m} + mp^{m-1}q$, l'on aura $a^{2m} + ma^{2m-2} \times \overline{2ab - 2ac + bb - 2bc + cc}$, ou en faiſant $m = \frac{1}{2}$, $a + \frac{1}{2}a^{1-2} \times \overline{2ab - 2ac + bb - 2bc + cc}$, ou $a + a^{1-2+1}b - a^{1-2+1}c + \frac{1}{2}a^{1-2}bb - a^{1-2}bc + \frac{1}{2}a^{1-2}cc$. Mais parceque le ſecond & le troiſième termes deviennent $+b$, & $-c$; il ſuit que tous les autres termes, où b, & c ſe rencontrent ſont nuls. Ainſi

$\overline{aa + 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc}^{\frac{1}{2}}$, ou

$\sqrt{aa + 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc} = a + b - c$.

EXEMPLE III.

SOIT la quantité $9aa + 12ab + 4bb$ dont il faut extraire la racine quarrée, ou qu'il faut élever à la puiſſance $\frac{1}{2}$.

Ayant ſuppoſé $9aa$, ou $9a^2 = p$, & $12ab + 4bb = q$; & mettant ces valeurs de p & de q dans les deux premiers termes de la Formule $p^m + mp^{m-1}q$, l'on aura $9^m a^{2m} + m9^{m-1} a^{2m-2} \times \overline{12ab + 4bb}$, ou en faiſant $m = \frac{1}{2}$, $9^{\frac{1}{2}} \times a^{1} + \frac{1}{2} \times 9^{-\frac{1}{2}} a^{-1} \times \overline{12ab + 4bb}$, ou $9^{\frac{1}{2}} a + \frac{1}{2} \times \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} a^{-1} \times \overline{12ab + 4bb}$: mais $9^{\frac{1}{2}}$ ou $\sqrt{9} = 3$; donc $3a + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} a^{-1} \times \overline{12ab + 4bb}$, ou $3a + \frac{1}{6} a^{-1} \times \overline{12ab + 4bb}$, ou $3a + \frac{12}{6} a^{-1+1} b + \frac{4}{6} a^{-1} bb$, ou $3a + 2a^0 b + \frac{2}{3} a^{-1} \times bb$: mais le ſecond terme $2a^0 b = 1b$; c'eſt pourquoi ce ſecond terme eſt le dernier, & le troiſiême eſt nul. Ainſi $\overline{9aa + 12ab + 4bb}^{\frac{1}{2}}$, ou $\sqrt{9aa + 12ab + 4bb} = 3a + 2b$.

REMARQUE.

64. SI dans aucun terme la valeur de m, expoſant de p, ne ſe trouvoit point $= 0$, la racine de la quantité propoſée ſeroit irrationnelle, & l'extraction ſe pourroit continuer à l'infini; ce qu'on appelle approximation des racines : mais cela n'eſt point néceſſaire pour l'application de l'Algebre à la Géometrie : car lorſque la racine d'une quantité eſt irrationnelle, on ſe contente de l'exprimer par le moyen du ſigne radical qui lui convient, comme on a déja dit, & comme on pourra voir dans la ſuite.

Pour

Pour s'assurer si on a bien extrait une racine, il est bon de l'élever à sa puissance : car s'il vient la quantité proposée, l'extraction aura été bien faite. Par exemple, l'on vient de trouver $3a + 2b$ pour la racine quarrée de $9aa + 12ab + 4bb$. Or si l'on multiplie $3a + 2b$ par $3a + 2b$, l'on trouvera $9aa + 12ab + 4bb$ qui est la quantité proposée; c'est pourquoi l'extraction a été bien faite.

RE'DUCTION

Des quantitez irrationnelles à leurs plus simples expressions.

65. Il y a des quantitez complexes, comme d'incomplexes, dont on ne peut point extraire exactement la racine demandée : mais il arrive souvent que ces quantitez sont le produit de la puissance dont on veut extraire la racine par quelqu'autre quantité; & en ce cas on peut extraire la racine en partie, en mettant devant le signe radical la racine de cette puissance, & l'autre quantité sous le signe radical. Par exemple, il est aisé de voir que $aab + aac$ n'est point un quarré, & qu'on n'en peut par conséquent extraire la racine quarrée, qu'en l'écrivant sous le signe radical en cette sorte $\sqrt{aab + aac}$: mais on voit aisément que $aab + aac$ est le produit de aa qui est un quarré, par $b + c$, ou que $\sqrt{aab + aac} = \sqrt{aa} \times \sqrt{b + c}$: or $\sqrt{aa} = a$; donc $\sqrt{aab + aac} = a \times \sqrt{b + c} = a\sqrt{b + c}$; & c'est ce qu'on appelle extraire une racine en partie, ou plutôt ce qu'on appelle réduire une quantité irrationnelle à sa plus simple expression, ce qu'on doit toujours faire quand cela se peut, soit que les quantitez soient complexes ou incomplexes.

Lorsqu'on ne voit pas par la seule inspection des termes, si une quantité irrationnelle complexe ou incomplexe peut être réduite à une expression plus simple, on l'examinera en cherchant (n°. 56. ou 57.) tous les diviseurs qui la peuvent exactement diviser; & s'il s'en trouve quelqu'un qui soit une puissance du même nom que la racine qu'on

veut extraire, la quantité proposée se pourra réduire à une plus simple expression : car elle pourra être regardée comme le produit de cette puissance, & du quotient qui vient en la divisant par la même puissance. Par exemple, s'il faut extraire la racine quarrée de $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$, en cherchant tous les diviseurs de cette quantité, on trouvera que $aa - 2ab + bb$, qui est un quarré, en est un, & qu'en divisant $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ par $aa - 2ab + bb$, il vient au quotient $a - b$; c'est pourquoi $\sqrt{a^3 - 3aab + 3abb - b^3} = \sqrt{aa - 2ab + bb} \times \sqrt{a - b}$: or $\sqrt{aa - 2ab + bb} = a - b$; donc $\sqrt{a^3 - 3aab + 3abb - b^3} = a - b\sqrt{a - b}$.

Lorsqu'on trouve plusieurs diviseurs qui sont des puissances de même nom que les racines qu'on veut extraire, on ne se servira que du plus grand.

66. On ajoute, on soustrait, on multiplie, & on divise les quantitez irrationnelles comme les rationnelles ; & ces quatre operations se font de la même maniere pour les unes & pour les autres : mais pour une plus grande facilité, il les faut auparavant réduire à leurs expressions les plus simples ; & comme les quantitez irrationnelles ne different des rationnelles que par le signe radical qui caracterise de maniere celles qu'il précede, que quand elles contiendroient les mêmes lettres que celles qui le précedent, elles ne leur seroient pas pour cela semblables ; de sorte que les quantitez qui sont hors du signe radical, ne doivent point être mêlées dans aucune de ces quatre operations, avec celles qui sont sous le signe radical.

Il faut néanmoins remarquer que les quantitez irrationnelles sont semblables, lorsque celles qui sont sous les signes radicaux, ne different en rien du tout les unes des autres, & lorsque celles qui sont hors des signes radicaux ne different de même en rien du tout, ou ne different que par leurs coéficiens. Ainsi $3a\sqrt{a}$ & $2a\sqrt{a}$; $3a\sqrt{a+b}$; & $a\sqrt{a+b}$; $\frac{a}{b}\sqrt{ax - xx}$, & $\frac{3a}{b}\sqrt{ax - xx}$, sont des quan-

titez irrationnelles ſemblables. On ſuppoſe que le ſigne radical ſoit le même, ce qui arrive toujours dans l'Application de l'Algebre à la Géometrie.

ADDITION

Des quantitez irrationnelles.

67. ON les écrira de ſuite, ou au-deſſous les unes des autres avec les ſignes qu'on leur trouve, & lorſqu'elles ſeront ſemblables, on en fera (nº. 11.) la réduction comme ſi c'étoit des quantitez rationnelles. Ainſi pour ajouter $2a\sqrt{b}$ avec $3a\sqrt{b}$, l'on écrira $2a\sqrt{b} + 3a\sqrt{b}$, qui ſe réduit à $5a\sqrt{b}$. Pour ajouter $3a\sqrt{b}$ avec $2c\sqrt{b}$, l'on écrira $3a\sqrt{b} + 2c\sqrt{b}$, & il eſt indifferent de laiſſer ces quantitez en cet état, ou de les écrire en cette ſorte $\overline{3a + 2c}\sqrt{b}$. Pour ajouter $a\sqrt{ax - xx}$ avec $b\sqrt{ax - xx}$, l'on écrira $a\sqrt{ax - xx} + b\sqrt{ax - xx}$, ou $\overline{a + b}\sqrt{ax - xx}$. Pour ajouter $3a\sqrt{b}$ avec $2c\sqrt{d}$, l'on écrira $3a\sqrt{b} + 2c\sqrt{d}$ qui ne peut point avoir d'autre expreſſion.

SOUSTRACTION

Des quantitez irrationnelles.

68. ON les écrira de ſuite en changeant les ſignes de celles qui doivent être ſouſtraites; & lorſqu'elles ſeront ſemblables, on en fera (nº. 11.) la réduction comme ſi c'étoit des quantitez rationnelles. Ainſi pour ſouſtraire $3a\sqrt{b}$ de $5a\sqrt{b}$, l'on écrira $5a\sqrt{b} - 3a\sqrt{b}$ qui ſe réduit à $2a\sqrt{b}$. Pour ſouſtraire $3a\sqrt{2b}$ de $5b\sqrt{2b}$, l'on écrira $5b\sqrt{2b} - 3a\sqrt{2b}$, ou $\overline{5b - 3a}\sqrt{2b}$. Pour ſouſtraire $-2b\sqrt{ax - xx}$ de $3b\sqrt{ax - xx}$, l'on écrira $3b\sqrt{ax - xx} + 2b\sqrt{ax - xx}$, qui ſe réduit à $5b\sqrt{ax - xx}$. Pour ſouſtraire $2c\sqrt{d}$ de $3a\sqrt{b}$, l'on écrira $3a\sqrt{b} - 2c\sqrt{d}$, qui ne peut avoir d'autre expreſſion.

MULTIPLICATION

Des quantitez irrationnelles.

69. SI les quantitez que l'on veut multiplier ſont incomplexes, l'on multipliera la partie rationnelle par la rationnelle ; & la partie irrationnelle par l'irrationnelle, & l'on écrira le produit des parties rationnelles devant le ſigne radical & le produit des irrationnelles après, & l'on réduira le produit total à ſon expreſſion la plus ſimple. Ainſi $a\sqrt{b} \times c\sqrt{b} = ac\sqrt{bb}$: mais $\sqrt{bb} = b$; donc $ac\sqrt{bb} = abc$; d'où l'on voit que lorſque les parties irrationnelles ſont ſemblables, il n'y a qu'à multiplier le produit des rationnelles par ce qui ſe trouve ſous le ſigne radical. De même $a\sqrt{b} \times \sqrt{c}$, ou $a\sqrt{b} \times 1\sqrt{c}$ (car on prend l'unité pour partie rationnelle, lorſqu'il n'y en a point d'autre) $= a\sqrt{bc}$; $2a\sqrt{b} \times 3b$, ou $2a\sqrt{b} \times 3b\sqrt{1} = 6ab\sqrt{b}$; $2a\sqrt{bc} \times b\sqrt{ab} = 2ab\sqrt{abbc} = 2abb\sqrt{ac}$; $2a\sqrt{3bc} \times 3b\sqrt{6ab} = 6ab\sqrt{18abbc} = 18abb\sqrt{2ac}$; $a\sqrt{2b} \times 2b\sqrt{3c} = 2ab\sqrt{6bc}$. $\sqrt[3]{ab} \times \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{aabb}$; $2a\sqrt[3]{ab} \times 3b\sqrt[3]{aa} = 6ab\sqrt[3]{a^3b} = 6aab\sqrt[3]{b}$. Il en eſt ainſi des autres.

70. Si les quantitez que l'on veut multiplier ſont complexes, on multipliera tous les termes de l'une par chacun de ceux de l'autre, en ſuivant les regles des quantitez incomplexes, & la Réduction des produits particuliers étant faite, l'on aura le produit total. Ainſi $\sqrt{aa+bb} \times \sqrt{aa+bb} = aa+bb$; $\sqrt{aa-bb} \times -\sqrt{aa-bb} = -aa+bb$; $2a\sqrt{aa+bb} \times b\sqrt{aa+bb} = 2a^3b + 2ab^3$. Ceci eſt évident ; car lorſque la même quantité ſe trouve ſous le ſigne radical $\sqrt{}$, en ôtant le ſigne radical, cette quantité ſe trouve multipliée par elle-même. Ce qu'on peut encore prouver en cette ſorte : $\sqrt{aa+bb} \times \sqrt{aa+bb} = \overline{aa+bb}^{\frac{1}{2}} \times \overline{aa+bb}^{\frac{1}{2}} =$ (nº. 34.) $\overline{aa+bb}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$, ou (nº. 33.) $\overline{aa+bb}^{\frac{1}{2}\times 2} = aa+bb$. Il en eſt ainſi des autres.

Pour multiplier $\sqrt{a+b}$ par $\sqrt{a-b}$, on multipliera $a+b$ par $a-b$, comme ſi c'étoit des quantitez rationnelles, & l'on aura $\sqrt{aa-bb}$. De même $a+\sqrt{ab}\times b = ab+b\sqrt{ab}$; $a+\sqrt{ab}\times\sqrt{bc} = a\sqrt{bc}+\sqrt{abbc} = a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}$; $3a\sqrt{bc}-2b\sqrt{ac}\times 2c\sqrt{ab} = 6ac\sqrt{abbc}-4bc\sqrt{aabc} = 6abc\sqrt{ac} - 4abc\sqrt{bc}$. Voici des Exemples plus compoſez.

$a+\sqrt{aa-bb}$ multiplié.
par $a+\sqrt{aa-bb}$

$aa+a\sqrt{aa-bb}$
$+a\sqrt{aa-bb}+aa-bb$

Produit $aa+2a\sqrt{aa-bb}+aa-bb$.

$a+\sqrt{aa-xx}$ multiplié
par $a-\sqrt{aa-xx}$

Produit $aa+a\sqrt{aa-xx}$
$-a\sqrt{aa-xx}-aa+xx$
$=aa \quad * \quad -aa+xx$.

$\sqrt{ab}+\sqrt{aa-xx}$ multiplié
par $\sqrt{ab}+\sqrt{aa-xx}$

Produit $ab+\sqrt{a^3b-abxx}$
$+\sqrt{a^3b-abxx}+aa-xx$
$=ab+2\sqrt{a^3b-abxx}+aa-xx$.

$ac+b\sqrt{aa-xx}$ multiplié
par $bc-c\sqrt{aa-yy}$

Prod. $abcc+bbc\sqrt{aa-xx}$
$-acc\sqrt{aa-yy}-bc\sqrt{a^4-aaxx-aayy+xxyy}$
$=abcc+bbc\sqrt{aa-xx}-acc\sqrt{aa-yy}$
$(-bc\sqrt{a^4-aaxx-aayy+xxyy}$.

DIVISION

Des quantitez irrationnelles.

71. ON écrira le dividende au-dessous du diviseur en forme de fraction, & l'on prendra cette fraction pour le Quotient de la division. Mais lorsque l'on s'appercevra que le dividende sera le produit du diviseur par une autre quantité, ce qui est aisé dans les quantitez incomplexes, on prendra cette autre quantité pour le Quotient. Et dans les quantitez complexes, lorsqu'on n'appercevra pas le Quotient, on examinera (n°. 46.) si la division se peut faire; & si elle se fait, l'on aura un Quotient sans fraction: mais si elle ne se fait point, on se contentera de la division indiquée. Ainsi $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{b}$; $\frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}$; $\frac{12ac\sqrt{6bc}}{4c\sqrt{2b}} = 3a\sqrt{3c}$; $\frac{\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{a+x}} = \sqrt{a-x}$: car $a+x \times a - x = aa - xx$. Il en est ainsi des autres.

Il y a d'autres Réductions pour les divisions indiquées qu'on trouvera ailleurs; & tout ce que nous allons dire des raports & des fractions, se doit aussi entendre de ces sortes de divisions, soit qu'elles soient rationnelles, ou irrationnelles.



THEORIE

Des Raisons, ou Raports des Fractions, des Equations, & des Proportions.

DE'FINITIONS.

II. RAISON, ou Raport est la comparaison de deux grandeurs de même genre, telles que sont deux nombres, deux lignes, deux surfaces, deux corps, deux espaces de temps, deux quantitez de mouvement, deux vitesses d'un même, ou de deux differens mobiles, deux poids, deux sons, *&c.*

Or comparer les grandeurs, c'est operer sur les grandeurs; & comme l'on ne peut operer sur les grandeurs qu'en les ajoutant, soustrayant, multipliant, divisant, & en extrayant les racines; il faut necessairement que leur comparaison se fasse par quelques-unes de ces operations.

Mais parceque l'Addition, & la Multiplication les confondent, & n'en marquent point l'égalité, ou l'inégalité, en quoi consiste précisément la comparaison des grandeurs, & que l'extraction des racines n'agit que sur une seule; & qu'au contraire la Soustraction fait connoître l'égalité de deux grandeurs, ou l'excès de l'une par-dessus l'autre, ou la difference de l'une à l'autre, & que la Division détermine combien de fois une grandeur en contient, ou est contenue dans une autre; ou, ce qui est la même chose, indique la maniere dont une grandeur en contient, ou est contenue dans une autre, ou en marque l'égalité; il suit qu'il n'y a que la Soustraction & la Division qui puissent servir à comparer les grandeurs.

1. La comparaison de deux grandeurs par la Soustraction; ou, ce qui est la même chose, la Soustraction elle-même, est nommée raison ou raport *arithmetique.* Ainsi

$12 - 4$; $a - b$, ou $b - a$, &c. ſont des raiſons ou des raports arithmetiques.

2. La comparaiſon de deux grandeurs par la Diviſion; ou, ce qui eſt la même choſe, la Diviſion elle-même eſt appellée raiſon, ou raport *géometrique*. Ainſi $\frac{12}{4}$, ou $\frac{4}{12}$; $\frac{a}{b}$, ou $\frac{b}{a}$, &c. ſont des raiſons ou des raports géometriques.

On prend ici la Souſtraction indiquée pour la Souſtraction même, ou pour la difference des deux grandeurs qui la compoſent; & l'on prend de même la Diviſion indiquée pour la Diviſion même, ou pour le Quotient des deux quantitez qui la forment.

On appellera dans la ſuite *Réduction*, le réſultat de ces deux Regles ou de ces deux Raports, c'eſt-à-dire, la difference & le Quotient des deux quantitez qui les compoſent.

COROLLAIRE I.

3. IL eſt clair que les raiſons ou raports tant arithmetiques que géometriques, ſont égaux lorſque leurs Réductions ſont égales. Ainſi $12 - 4 = 16 - 8$, parceque $12 - 4 = 8$, & $16 - 8 = 8$. De même $\frac{12}{4} = \frac{9}{3}$, parceque $\frac{12}{4} = 3$, & $\frac{9}{3} = 3$. Par la même raiſon, ſi $\frac{a}{b} = f$ & $\frac{c}{d} = f$; l'on aura $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

4. Mais les Réductions, ou les Quotiens des diviſions, ou des raports géometriques, ſont toujours égaux, lorſque les dividendes contiennent, ou ſont contenues de même maniere dans les diviſeurs. C'eſt pourquoi lorſqu'une grandeur a contiendra, ou ſera contenue dans une autre grandeur b, comme une troiſiême c contient ou eſt contenue dans une quatriême d, ces quatre grandeurs formeront toujours deux raports géometriques égaux, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

COROLLAIRE II.

Corollaire II.

5. Il eſt de même évident que les raiſons, ou raports tant arithmetiques que géometriques, ſont inégaux, lorſque leurs Réductions ſont inégales, & que le plus grand eſt celui dont la Réduction eſt la plus grande. Ainſi $12 - 4 > 10 - 6$: car $12 - 4 = 8$, & $10 - 6 = 4$. De même $\frac{12}{4} > \frac{16}{8}$: car $\frac{12}{4} = 3$, & $\frac{16}{8} = 2$.

6. Le premier terme d'un raport arithmetique, & le terme ſuperieur d'un raport géometrique, ſont nommez *antecedens*; le ſecond d'un raport arithmetique, & l'inferieur d'un raport géometrique, ſont nommez *conſequens*. Ainſi dans les raports $a - b$, & $\frac{a}{b}$, a eſt l'antecedent, & b le conſequent : mais comme les raiſons ou les raports géometriques ne ſont autre choſe que des Diviſions indiquées, & que ces Diviſions ſont, à proprement parler, des fractions; il ſuit qu'il n'y a aucune difference entre raiſon, raport, diviſion, & fraction; de ſorte que tout ce qu'on dira dans la ſuite des uns, ſe doit auſſi entendre des autres. On remarquera ſeulement que pour parler comme les autres, lorſqu'il s'agira des raiſons ou raports, on appellera les deux termes *antecedent* & *conſequent*; lorſqu'il s'agira de Diviſions, on les appellera *dividende* & *diviſeur*; & lorſqu'il s'agira de fractions, on les appellera *numerateur* & *dénominateur*.

7. Lorſque l'antecedent d'une raiſon eſt égal à ſon conſequent, on l'appelle *raiſon d'égalité*; & lorſque l'un ſurpaſſe l'autre, on l'appelle *raiſon d'inégalité*.

8. Lorſque l'antecedent d'un raport géometrique, contient pluſieurs fois exactement ſon conſequent, il eſt nommé *multiple* de ce conſequent; & lorſque l'antecedent eſt contenu pluſieurs fois exactement dans ſon conſequent, il eſt nommé *ſoûmultiple* du même conſequent.

9. De tels raports tirent leur dénomination du nombre de fois que l'antecedent contient le conſequent, ou

y eſt contenu. De ſorte que ſi l'antecedent contient deux, trois, quatre fois, *&c.* ſon conſequent, le raport ſera nommé *double*, *triple*, *quadruple*, *&c.* & ſi l'antecedent eſt contenu deux, trois, quatre fois, *&c.* dans le conſequent, le raport ſera nommé *ſoûdouble*, *ſoûtriple*, *ſoûquadruple*, &c. Ainſi $\frac{12}{4}$ eſt un raport triple, & $\frac{4}{12}$ eſt un raport ſoûtriple.

10. On appelle *équation* deux quantitez algebriques differentes, entre leſquelles ſe trouve le ſigne d'égalité ; ainſi $a = b$; $ax - xx = yy$; $x = \frac{ab}{c}$ ſont des équations.

11. Les deux quantitez algebriques qui ſe trouvent de part & d'autre du ſigne d'égalité ſont nommées *membres* de l'équation ; celle qui le précede eſt nommée le premier membre, & celle qui le ſuit, le ſecond. D'où l'on voit que les deux membres d'une équation ſont les expreſſions algebriques d'une même quantité, ou de deux quantitez égales.

COROLLAIRE.

12. IL eſt évident que deux raports égaux arithmetiques, ou géometriques, peuvent toujours former une équation. Ainſi ſi a ſurpaſſe, ou eſt ſurpaſſée par b, de la même quantité que c ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſée par d, l'on aura toujours $a - b = c - d$, ou $b - a = d - c$. De même ſi a contient ou eſt contenue dans b, comme c contient ou eſt contenue dans d, l'on aura toujours $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ou $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

13. Mais ſi au lieu de former une équation de deux raports égaux, arithmetiques, ou géometriques, on arrange leurs quatre termes de ſuite, en ſorte que l'antecedent de l'un des deux raports ſoit le premier, ſon conſequent, le ſecond ; l'antecedent de l'autre raport, le troiſiême, & ſon conſequent le quatriéme, en ſéparant les deux raports par quatre points, & les deux termes de

chaque raport par un ſeul point, en cette ſorte $a . b :: c . d$, (en ſuppoſant que $a - b = c - d$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$); on appellera *proportion*, ou *analogie* cette diſpoſition des quatre termes de deux raports égaux. De ſorte que proportion ou analogie, n'eſt autre choſe que l'égalité de deux raports arrangez autrement qu'en équation. Si les raports ſont arithmetiques, on la nommera *proportion arithmetique*; s'ils ſont géometriques, on la nommera *proportion géometrique*.

14. Pour énoncer une proportion, comme celle-ci $a . b :: c . d$; on dira, ſi elle eſt arithmetique, a ſurpaſſe b, ou eſt ſurpaſſée par b, comme c ſurpaſſe d, ou eſt ſurpaſſée par d; & ſi elle eſt géometrique, on dira a contient b, ou eſt contenue dans b, comme c contient d, ou eſt contenue dans d. Mais pour abreger, ſoit que la proportion ſoit arithmetique, ou géometrique, on dit a eſt à b, comme c eſt à d, ou comme a eſt à b, ainſi c eſt à d, en obſervant neanmoins que le mot *eſt* ſignifie *ſurpaſſe*, ou *eſt ſurpaſſé* dans la proportion arithmetique; & que dans la géometrie, il ſignifie *contient* ou *eſt contenu*.

L'on diſtingue deux ſortes de proportions, tant arithmetiques que géometriques, la *diſcrete*, & la *continue*.

15. La proportion diſcrete eſt celle dont les quatre termes ſont differens, comme celle ci $a . b :: c . d$.

16. La proportion continue, eſt celle où la même quantité eſt le conſequent du premier raport & l'antecedent du ſecond, comme celle-ci $a . b :: b . c$.

17. Les quantitez qui forment une proportion ſont nommées *proportionnelles*. Ainſi la proportion diſcrete renferme quatre proportionnelles, & la continue n'en renferme que trois, & celle du milieu eſt nommée *moyenne proportionnelle*, arithmetique ou géometrique, ſelon que la proportion eſt arithmetique ou géometrique, & dans l'une & dans l'autre proportion, le premier & le dernier termes ſont nommez *extrêmes*, & les deux du milieu, *moyens*.

18. Lorſqu'une proportion continue renferme plus de

trois termes : ou plutôt lorſque pluſieurs grandeurs dont le nombre ſurpaſſe 3, ſont rangées de ſuite, de maniere que chacune d'elles puiſſe ſervir de conſequent à celle qui la précede, & d'antecedent à celle qui la ſuit, cette rangée de grandeurs eſt appellée *progreſſion*, arithmetique ou géometrique, ſelon que les raports, que les grandeurs qui la compoſent, ont entr'elles, ſont arithmetiques ou géometriques. *A*, *B*, *C*, ſont des progreſſions arithmetiques. *D*, *E*, *F*, des progreſſions géometriques.

A. 1 . 2 . 3 . 4 . 5, *&c.* *D*. 1 . 2 . 4 . 8 . 16, *&c.*
B. 10 . 8 . 6 . 4 . 2, *&c.* *E*. 81 . 27 . 9 . 3 . 1, *&c.*
C. 4 . 2 . 0 — 2 — 4, *&c.* *F*. 4 . 2 . 1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$, *&c.*

COROLLAIRE I.

19. Il eſt clair (n°. 18.) que dans une progreſſion arithmetique, l'excès d'un terme quelconque par-deſſus celui qui le ſuit, ou qui le précede, doit être toujours le même. De ſorte que ſi on nomme le premier terme d'une progreſſion arithmetique a; & l'excès qui regne dans la progreſſion m, (m peut ſignifier un nombre quelconque, entier, ou rompu, poſitif, ou negatif) l'on pourra former par le moyen de ces deux lettres, une progreſſion arithmetique generale en cette ſorte,
a. $a+m$. $a+2m$. $a+3m$, *&c.*

COROLLAIRE II.

20. Il n'eſt pas moins évident que ſi dans la progreſſion géometrique, l'on diviſe un terme quelconque par celui qui le ſuit, la réduction, ou le quotient ſera toujours le même; c'eſt pourquoi ſi l'on nomme le premier terme d'une progreſſion géometrique b, & la réduction ou quotient qui regne dans la progreſſion n (n ſignifie un nombre poſitif, entier, ou rompu), l'on pourra former une progreſſion géometrique generale, en cette ſorte,
$\div b . \frac{b}{n} . \frac{b}{n^2} . \frac{b}{n^3}$, &c. car ſi une quantité b diviſée par

une autre, donne au quotient n, la même quantité b, divisée par le quotient n donnera cette autre.

21. Ceci se peut aussi appliquer aux proportions tant arithmetiques que géometriques. Soit par exemple, la proportion arithmetique suivante $a \,.\, b :: c \,.\, d$; si l'on nomme $a-b$, ou $b-a$, m; $c-d$ ou $d-c$ sera aussi m; donc $a \,.\, a-m :: c \,.\, c-m$, ou $a \,.\, a+m :: c \,.\, c+m$, d'où l'on voit que la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens, c'est-à-dire, $a+c \pm m = a \pm m + c$, puisque ces deux sommes, qui sont les deux membres de cette équation, renferment les mêmes quantitez.

22. De même, si dans la proportion géometrique suivante $a \,.\, b :: c \,.\, d$, on fait $\frac{a}{b} = n$, l'on aura aussi $\frac{c}{d} = n$; & partant (n°. 20.) $a \,.\, \frac{a}{n} :: c \,.\, \frac{c}{n}$; d'où l'on voit aussi que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, c'est-à-dire, $\frac{ac}{n} = \frac{ac}{n}$: car ces deux produits qui sont les deux membres de cette équation, renferment les mêmes quantitez.

Axiome I.

23. Si l'on ajoute, ou si l'on soustrait, ou si l'on multiplie, ou si l'on divise des quantitez égales par des quantitez égales; les sommes, ou les differences, ou les produits, ou les quotiens, seront égaux.

Corollaires.

1er. Il suit qu'on peut ajouter, soustraire, multiplier, ou diviser les deux membres d'une équation par les deux membres d'une autre, chacun par chacun. Par exemple, si $a = b$, & $c = d$, l'on aura $a \pm c = b \pm d$, ou $a \pm d = b \pm c$; $ac = bd$, ou $ad = bc$; $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, ou $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$

2e. Il suit aussi de cet Axiome, & de ce que l'Addition & la Soustraction ont des effets contraires, que l'on peut

paſſer tel terme que l'on voudra d'un membre d'une équation dans l'autre en changeant ſon ſigne, ce qu'on appelle *tranſpoſition*. On peut même paſſer tous les termes d'un des membres dans l'autre, ce qu'on appelle égaler tout à zero. Ainſi cette équation $a+b-c=g$ ſe peut changer en celle-ci $a+b=g+c$, ou en celle-ci $a=g+c-b$, ou en celle-ci $a+b-c-g=0$, ou $0=g-a-b+c$: car par exemple, dans le premier changement, on ne fait qu'ajouter c de part & d'autre du ſigne d'égalité, parcequ'elle y eſt ſouſtraite, ce qui donne $a+b-c+c=g+c$, qui ſe réduit à $a+b=g+c$. Il en eſt ainſi des autres changemens.

3e. Il ſuit de ce Corollaire que l'on peut changer tous les ſignes d'une équation; car il n'y a qu'à ſuppoſer qu'on fait paſſer tous les termes d'un membre dans l'autre; & que l'on peut mettre ſeuls, dans un des membres, les termes qu'on veut, avec les ſignes qu'on veut.

4e. Il ſuit encore du même Axiome, & de ce que la diviſion détruit ce que fait la multiplication, & au contraire; qu'on peut délivrer une équation de toutes les fractions qui s'y peuvent rencontrer : car il n'y a qu'à multiplier toute l'équation par tous les dénominateurs l'un après l'autre, ou ce qui revient au même, la multiplier une ſeule fois par le produit de tous les dénominateurs, & enſuite réduire (art. 1. no. 37.) les termes fractionnaires. Par exemple, pour ôter les fractions de cette équation $\frac{abx}{c}+gx=\frac{bcd}{a}$, on la multipliera par c & puis par a, ou une ſeule fois par ac, & l'on aura $\frac{aabcx}{c}+acgx=\frac{abccd}{a}$: mais (art. 1. no. 37.) $\frac{aabcx}{c}=aabx$, & $\frac{abccd}{a}=bccd$; donc $aabx+acgx=bccd$ qui n'a plus de fractions.

L'on abrege l'operation, & particulierement quand les dénominateurs ſont des polynomes, en écrivant les numerateurs des termes fractionnaires ſans y rien changer, & en multipliant les autres termes par les dénominateurs.

Ainſi pour ôter la fraction de cette équation $\frac{xx - aa}{b - y} = c$, ayant multiplié c par $b - y$, l'on aura $xx - aa = bc - cy$. Il en eſt ainſi des autres.

5e. Il ſuit auſſi qu'on peut délivrer une lettre, ou telle puiſſance qu'on voudra d'une même lettre, qui ſe trouve dans une equation, de toutes autres quantitez qui l'accompagnent; ce qu'on appelle trouver la valeur d'une lettre ou d'une puiſſance: car il n'y a pour cela qu'à diviſer toute l'équation par les quantitez qui multiplient cette lettre après avoir mis dans un des membres tous les termes où ſe trouve cette lettre, & tous les autres termes dans l'autre membre, & qu'à faire enſuite la réduction. Par exemple, ſi dans cette équation $ax = bc$, l'on veut mettre x ſeule dans le premier membre, l'on aura en diviſant toute l'équation par a, $\frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}$: mais (art. 1. no. 37.) $\frac{ax}{a} = x$; donc $x = \frac{bc}{a}$. Le ſecond membre ne peut être réduit.

Si dans celle-ci $ax = ab + bx - bc$, l'on veut avoir x ſeule dans un des membres, l'on aura en tranſpoſant, & en ſuppoſant que a ſurpaſſe b, $ax - bx = ab - bc$, & en diviſant tout par $a - b$, l'on aura $\frac{ax - bx}{a - b} = \frac{ab - bc}{a - b}$: mais (art. 1. no. 43, ou 46.) $\frac{ax - bx}{a - b} = x$; donc $x = \frac{ab - bc}{a - b}$.

Si dans cette équation $ax - bx = aa - bb$, l'on veut avoir x ſeule, en diviſant par $a - b$, l'on aura $\frac{ax - bx}{a - b} = \frac{aa - bb}{a - b}$: mais (art. 1. no. 46.) $\frac{ax - bx}{a - b} = x$, & $\frac{aa - bb}{a - b} = a + b$; donc $x = a + b$.

Si dans cette équation $aaxx + aayy - 2ax^3 - 2axyy + xxyy = 0$, l'on veut mettre yy seule dans le premier membre, l'on aura en transposant $aayy - 2axyy + xxyy = 2ax^3 - aaxx$, & en divisant chaque membre par $aa - 2ax + xx$, l'on aura $yy = \frac{2ax^3 - aaxx}{aa - 2ax + xx}$. Il en est ainsi des autres.

AXIOME II.

24. LES puissances & les racines des quantitez égales sont égales.

Ainsi si $x = + a$, l'on aura en quarrant chaque membre $xx = aa$; & si $xx = aa$, les racines seront $x = \pm a$; si $xx = ab$, les racines seront $x = \pm \sqrt{ab}$. Si $xx = -ab$, les racines seront $x = \pm \sqrt{-ab}$, qu'on appelle racine *imaginaire*, parce que l'on n'en peut pas exprimer la valeur, telles sont toutes les quantitez irrationnelles negatives.

Si $yy = \frac{2ax^3 - aaxx}{aa - 2ax + xx}$, les racines seront $y = \frac{\sqrt{2ax^3 - aaxx}}{\sqrt{aa - 2ax + xx}}$: mais (art. 1. n°. 66.) $\sqrt{2ax^3 - aaxx} = x\sqrt{2ax - aa}$, & $\sqrt{aa - 2ax + xx} = a - x$; donc $y = \frac{x\sqrt{2ax - aa}}{a - x}$.

Si $xx = ax + bb$, les racines seront $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$: car en transposant, l'on a $xx - ax = bb$: or si l'on extrait (art. 1. n°. 62.) la racine du premier membre $xx - ax$, on trouvera qu'il y manque $+ \frac{1}{4}aa$, afin qu'il soit quarré; c'est pourquoi en ajoutant de part & d'autre $\frac{1}{4}aa$, l'on aura $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$: mais $\sqrt{xx - ax + \frac{1}{4}aa} =$ (art. 1. n°. 62.) $x - \frac{1}{2}a$, & la racine du second membre ne s'extrait que par le moyen du signe radical; donc $x - \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ ou en transposant $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Si les signes étoient

étoient differens, cela n'apporteroit aucun changement dans l'operation.

C'est aussi parceque les puissances des quantitez égales sont égales, que l'on peut délivrer uné équation des quantitez irrationnelles qui s'y rencontrent : ce qu'on appelle *faire évanouir les signes radicaux* : car s'il ne s'y en rencontre qu'une, après l'avoir mise seule dans un des membres de l'équation par les Corollaires précedens ; il n'y aura qu'à élever chaque membre à la puissance qui a pour exposant celui du signe radical. Ainsi pour délivrer des quantitez irrationnelles, cette équation $xx = \overline{a - x} \times \sqrt{xx + yy}$, l'on aura en divisant par $a - x$, $\frac{xx}{a - x} = \sqrt{xx + yy}$, ou en divisant par $\sqrt{xx + yy}$, $\frac{xx}{\sqrt{xx + yy}} = a - x$, & en quarrant chaque membre, l'on aura $\frac{x^4}{xx + yy} = aa - 2ax + xx$, où il n'y a plus de quantitez irrationnelles.

Mais s'il se rencontre deux quantitez irrationnelles dans une même équation, on la délivrera de l'une, & ensuite de l'autre comme on vient de dire. Par exemple, pour délivrer de quantitez irrationnelles, cette équation $\sqrt{xx + yy} + \sqrt{aa - 2ax + xx + yy} = b$, l'on aura en transposant, $\sqrt{aa - 2ax + xx + yy} = b - \sqrt{xx + yy}$, & en quarrant chaque membre, l'on aura $aa - 2ax + xx + yy = bb - 2b\sqrt{xx + yy} + xx + yy$, & en ôtant ce qui se détruit par la réduction, & transposant, il vient $2b\sqrt{xx + yy} = bb - aa + 2ax$, & en quarrant encore chaque membre, l'on a $4bbxx + 4bbyy = b^4 - 2aabb + a^4 + 4abbx - 4a^3x + 4aaxx$, où il n'y a plus de quantitez irrationnelles.

AXIOME III.

25. ON peut mettre en la place d'une quantité quelconque incomplexe ou complexe, une autre quantité égale incomplexe, ou complexe, ce qu'on appelle *substituer* :

C'est par le moyen de cet Axiome que l'on réduit plusieurs équations à une seule, & que l'on en fait évanouir les lettres que l'on veut, pourvû que chacune de ces lettres, ou quelques-unes de leurs puissances se trouvent au moins dans deux de ces équations, & que l'on ait au moins une équation de plus qu'il y a de lettres que l'on veut faire évanouir. En voici la Méthode.

26. On choisit une des équations (c'est ordinairement la plus simple) & l'on met seule (axio. 1. & ses Coroll.) la lettre qu'on veut faire évanouir, dans un des membres; (c'est ordinairement dans le premier), & l'on substitue dans les autres équations, en la place de cette lettre, ou de ses puissances, sa valeur, ou celle de ses puissances, qui se trouve dans l'autre membre de l'équation que l'on a préparée; en sorte que cette lettre ne se trouve plus dans aucune, & l'on a alors une équation de moins. On recommence de nouveau à choisir la plus simple des équations résultantes, & l'on met seule dans le premier membre, la lettre qu'on veut faire évanouir, & l'on substitue comme auparavant la valeur de cette lettre dans les autres équations. On réïtere la même operation jusqu'à ce que l'on ait fait évanouir l'une après l'autre, toutes les lettres que l'on a dessein de faire évanouir, ou jusqu'à ce que l'on n'ait plus qu'une seule équation. On va eclaircir ceci par des Exemples.

EXEMPLES.

1er. SOIENT les trois équations *A*, *B*, C, dont on veut faire évanouir les deux lettres x & y.

A. $xz = yy$. *D*. $xz = bb - 2bz + zz$.
B. $x - y = A$. *E*. $x - b + z = a$.
C. $z + y = B$. *F*. $az + bz - zz = bb - 2bz + zz$.
G. $2zz = 3bz + az - bb$.

Je choisis l'équation C pour faire évanouir y, & j'en tire $y = b - z$, & en quarrant chaque membre (parceque le quarré de y se trouve dans l'équation *A*,) j'ai yy

$= bb - 2bz + zz$, & mettant dans l'équation A, pour yy sa valeur $bb - 2bz + zz$, & dans l'équation B, pour y sa valeur $b - z$, j'ai les deux équations D & F, où y ne se trouve plus. Je choisis de nouveau l'équation E pour faire évanouir x, & j'en tire $x = a + b - z$, & mettant dans l'équation D pour x sa valeur $a + b - z$, j'ai l'équation F, qui devient par la réduction, & par la transposition, l'équation G, où x & y ne se trouvent plus.

2e. Soient les deux équations $aa + 2ax + xx = 2yy + 2by + bb$, & $yy + by = aa + ax$, d'où il faut faire évanouir y. Je remarque que si la seconde équation étoit multipliée par 2, l'on auroit $2yy + 2by = 2aa + 2ax$, où les termes où y se trouve, sont les mêmes que dans la premiere; c'est pourquoi si l'on met dans la premiere pour $2yy + 2by$ sa valeur $+ 2aa + 2ax$ tirée de la seconde, après l'avoir multipliée par 2, l'on aura $aa + 2ax + xx = 2aa + 2ax + bb$, qui se réduit à $xx = aa + bb$. Il en est ainsi des autres.

27. On peut encore par le moyen de cet Axiome faire certains changemens dans une équation en faisant certaines suppositions. Par exemple, si l'on a $x^3 = aab$, en supposant $ay = xx$; & mettant cette valeur de xx dans l'équation $x^3 = aab$, l'on aura $axy = aab$, ou $xy = ab$; en divisant toute l'équation par a.

De même, si l'on a $xx = ax + bb$, en supposant $ac = bb$, l'on aura $xx = ax + ac$; & si l'on a $xx = ax + ac$, en supposant $bb = ac$, l'on aura $xx = ax + bb$. Ce qu'on appelle changer un rectangle en quarré, ou un quarré en rectangle. On a souvent besoin de faire ces changemens.

Pour ce qui reste à dire sur les équations : voyez l'Application de l'Algebre à la Geometrie, Section I. art. 2 & 3.

On trouve dans les Ouvrages de plusieurs Sçavans Geometres un grand nombre de Theorêmes démontrez sur les raports, proportions, & progressions; mais il y manque la Méthode de les démontrer tous par le même principe, qui est ce qu'il y a de plus à desirer tant en cette occasion que dans toutes les autres parties des Mathematiques.

On pourroit tirer de ce que nous avons dit, n°. 18, 19,

20 & 21, une Méthode pour démontrer très-facilement toutes les proprietez des proportions, & des progreſſions tant arithmetiques que geometriques : mais elle n'eſt pas aſſez generale, & ne convient qu'aux grandeurs proportionnelles; c'eſt pourquoi je me ſuis déterminé à prendre une autre voye, qui convienne tout à la fois, non ſeulement aux grandeurs proportionnelles, mais encore à tous les Theorêmes que l'on ſe propoſe de démontrer par l'Algebre dans toutes les parties des Mathematiques. Voici le principe.

PRINCIPE.

28. APRE'S avoir nommé les quantitez qui doivent entrer dans la queſtion par des lettres, l'on écrira l'Hypotheſe en équation, & la conſequence auſſi en équation; & en ſuivant les trois Axiomes précedens, & leurs Corollaires, on fera en ſorte de rendre l'Hypotheſe ſemblable à la conſequence, & alors le Theorême ſera démontré. Et ſi les termes de l'équation qui renfermera la conſequence, ſe trouvent entierement ſemblables; de ſorte que par la réduction, elle puiſſe devenir o = o. Le Theorême ſera auſſi démontré : car les termes d'une équation ne ſçauroient être entierement ſemblables ſans être égaux, & ne ſçauroient ſe détruire ſans être ſemblables.

EXPLICATION DU PRINCIPE.

1°. UN Theorême contient deux parties, l'Hypotheſe & la Conſequence; l'Hypotheſe eſt ce que l'on y ſuppoſe; & la Conſequence eſt la verité qu'il s'agit de démontrer.

2°. Le principe demande qu'on écrive toujours l'Hypotheſe en équation. Souvent l'Hypotheſe renferme cette équation, ou une proportion qu'il eſt aiſé de changer en équation : car ſi l'on a, $a . b :: c . d$, l'on aura (n°. 11.) $a - b = c - d$, ſi la proportion eſt arithmetique, & $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ſi la proportion eſt geometrique, puiſque proportion n'eſt autre choſe que l'égalité de deux raports.

3°. Si l'Hypothese ne renferme ni équation ni proportion, on égalera les quantitez qu'elle renferme à d'autres lettres prises arbitrairement, & l'on aura par ce moyen des équations, comme on verra par les Exemples.

4°. On tirera de l'Hypothese autant d'équations qu'on pourra : car cela ne peut que faciliter les moyens de rendre l'Hypothese semblable à la Consequence.

Lorsqu'il s'agit de démontrer quelques proprietez touchant les grandeurs inégales, & touchant les raports inégaux, l'on exprimera l'Hypothese, & la consequence par le moyen du signe $>$, ou $<$, en cette sorte $a >$ ou $< b$, $\frac{a}{b} >$ ou $< \frac{c}{d}$, & on se servira de ces expressions, que l'on pourroit appeller *inégalitez*, comme si c'étoient des équations : car il est clair qu'on peut ajouter, soustraire, multiplier, & diviser les deux membres de ces inégalitez par une même quantité, ou par des quantitez égales, les combiner, comme on voudra avec des équations, les élever à des puissances, en extraire les racines ; en un mot, on peut les traiter à la maniere des équations, pourvû qu'on ne les combine point ensemble, (si ce n'est par addition & par multiplication : car quoique $12 > 8$ & $6 > 1$, l'on a $12 - 6 < 8 - 1$ & $\frac{12}{6} < \frac{8}{1}$) sans que le membre le plus grand cesse d'être le plus grand ; de sorte qu'on aura les mêmes moyens de rendre l'Hypothese semblable à la Consequence, ou la Consequence semblable à l'Hypothese, que si c'étoit des équations, & de démontrer par consequent toutes les proprietez des raports inégaux, de la même maniere que celle des rapports égaux.

5°. Il est quelquefois à propos & même necessaire, pour rendre plus facilement l'équation qui renferme l'Hypothese semblable à celle qui renferme la Consequence, de nommer les grandeurs proportionnelles, comme nous avons dit n°. 19, 20, 21 & 22 ; & de nommer par les mêmes lettres les quantitez inégales qui ne sont point proportionnelles, en caracterisant les unes par quelque signe, ou par quelque lettre qui fasse voir leur inégalité. Par

exemple, ſi l'on veut démontrer quelque proprieté qui convienne à trois grandeurs differentes A, B, C; ayant nommé A, a, au lieu de nommer B, b; & C, c; on peut nommer B, ma, (m ſignifie *multiple*, ou *ſoûmultiple*) ou $a \pm p$; & C, na (n ſignifie *multiple*, ou *ſoûmultiple*, different de m), ou $a \pm p \pm r$, en ſe ſervant du ſigne + ou —, ſelon que les quantitez qu'on veut exprimer, ſont moindres, ou plus grandes que celle qui eſt exprimée par la premiere lettre a.

Ce qu'on dira dans la ſuite des raports & des proportions, ſe doit entendre des raports & proportions geometriques, à moins qu'on n'avertiſſe que c'eſt des raports & proportions arithmetiques qu'on veut parler.

Theorême I.

29. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *ſont en proportion geometrique, le produit des extrêmes ſera égal au produit des moyens.*

Il faut prouver que ſi $a . b :: c . d$, l'on aura $ad = bc$.

L'on a par l'Hypotheſe $a . b :: c . d$; donc (nº. 11.) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$: or il eſt clair (Axio. 1. Coroll. 4.) qu'en ôtant les fractions, on aura $ad = bc$, qui eſt ſemblable à la Conſequence. *C. Q. F. D.*

30. On prouvera de même que dans une proportion continue le produit des extrêmes eſt égal au quarré de la moyenne. Ainſi ſi $a . b :: b . c$, l'on aura $ac = bb$.

Ce Theorême fournit un autre moyen dont nous nous ſervirons dans la ſuite, de changer une proportion en équation.

Corollaires.

1er. Il ſuit que connoiſſant trois des termes a, b, c, d'une proportion, on pourra toujours trouver le 4e que je nomme x: car puiſque (Hyp.) $a . b :: c . x$, l'on aura (nº. 29.) $ax = bc$; donc en diviſant toute cette équation par a, l'on aura $x = \frac{bc}{a}$, d'où l'on voit que la valeur de bc diviſée par la valeur de a, donnera celle de x.

2e. De même dans la proportion continue, connoiſſant les extrêmes a & b, on trouvera la moyenne que je nomme y; car puiſque (Hyp.) $a . y :: y . b$, l'on aura $yy = ab$; & partant (Axio. 2.) $y = \pm \sqrt{ab}$; c'eſt pourquoi la racine de la valeur de ab ſera la valeur de y. Les valeurs negatives ne ſatisfont point aux Problêmes. On en expliquera l'uſage ailleurs.

THEORÊME II.

31. *LES racines des produits qui forment chaque membre d'une équation ſont reciproquement proportionnelles, c'eſt-à-dire qu'en prenant les racines d'un des membres pour les extrêmes, & les racines de l'autre pour les moyens, ces quatre racines formeront une proportion.*

Soit l'équation $abc = dfg$. Il faut prouver que $ab . df :: g . c$, ou afin que la conſequence ſoit en équation $\frac{ab}{g} = \frac{df}{c}$: car l'équation ne peut être vraye que la proportion ne le ſoit auſſi.

En diviſant toute l'équation $abc = dfg$, par gc, l'on aura $\frac{abc}{gc} = \frac{dfg}{gc}$, ou (art. 1. nº. 37.) $\frac{ab}{g} = \frac{df}{c}$, qui eſt ſemblable à la conſequence. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRES.

1er. ON peut tirer de la même équation $abc = dfg$ pluſieurs autres proportions, & les démontrer de la même maniere, pourvû qu'on prenne les extrêmes dans un membre, & les moyens dans l'autre, & qu'on garde la Loi des Homogenes, c'eſt-à-dire que les termes de chaque raport ayent un pareil nombre de dimenſions : par exemple, on en peut tirer $a . d :: fg . bc$; $b . f :: dg . ac$, *&c.* mais quoiqu'on le puiſſe, on n'en doit pas tirer $a . df :: g . bc$: car on compareroit des quantitez de differens genres, comme une ligne avec un plan. Il en eſt ainſi des autres.

2e. Il eſt clair qu'afin qu'une équation puiſſe être ré-

duite en proportion, il faut que chaque membre soit le produit de deux quantitez qui se puisse séparer par la division; c'est pourquoi il est souvent necessaire de la changer d'état pour la réduire en proportion. Par exemple, on ne peut réduire cette équation $xx = ax + bb$ en proportion dans l'état où elle est : car le second membre ne peut être divisé par aucune quantité : mais en transposant, l'on a $xx - ax = bb$, d'où l'on peut tirer $x . b :: b . x - a$. De celle-ci $xx = aa - bb$, on peut tirer $a - b . x :: x . a + b$. De celle-ci $xx = aa + bb$, ou $xx - aa = bb$, on peut tirer $x - a . b :: b . x + a$. Mais pour changer celle-ci $xx = aa - bc$ en proportion; il faut changer bc en un quarré, ou aa en un rectangle dont un côté soit b, ou c; faisant donc, par exemple, $bc = dd$, l'on aura $xx = aa - dd$, d'où l'on tire $a - d . x :: x . a + d$. Il en est ainsi des autres.

3e. Il suit aussi qu'un raport ou une fraction comme $\frac{ab}{c}$ est un des termes d'une proportion, & renferme les trois autres : car faisant $\frac{ab}{c} = x$, l'on aura en multipliant par c, $ab = cx$; donc (n°. 31.) $c . a :: b . x$, ou $c . a :: b . \frac{ab}{c}$, en remettant pour x sa valeur $\frac{ab}{c}$.

4e. Il suit aussi des deux Theorêmes précedens que si quatre grandeurs a, b, c, d, sont proportionnelles, c'est-à-dire que $a . b :: c . d$, elles seront aussi proportionnelles dans les quatre variations suivantes.

1. $a . c :: b . d$, ce qu'on appelle, *permutando.*
2. $b . a :: d . c$, ce qu'on appelle, *invertendo.*
3. $a + b . b :: c + d . d$, ce qu'on appelle, *componendo.*
4. $a - b . b :: c - d . d$, ce qu'on appelle, *dividendo.*

Car si les équations que l'on tirera (n°. 29.) de ces quatre analogies sont vrayes, les analogies le seront aussi. Or la premiere & la seconde analogie donnent $ad = bc$, la troisiéme donne $ad + bd = bc + bd$, & la quatriéme $ad - bd = bc - bd$: mais l'Hypothese $a . b :: c . d$, donne $ad = bc$,

qui

qui est la premiere équation, & qui montre par consequent la verité des deux premieres analogies.

Si l'on ajoute, & si l'on soustrait bd de chaque membre de l'équation $ad = bc$ tirez de l'Hypothese, l'on aura $ad + bd = bc + bd$, & $ad - bd = bc - bd$, qui sont semblables aux deux dernieres équations tirées des deux dernieres analogies, & qui en font par consequent voir la verité.

Il y a encore d'autres variations dans les proportions que l'on démontrera avec la même facilité.

THEORÊME III.

32. S*I deux grandeurs quelconques* a *&* b, *sont multipliées par une même grandeur* c, *rationnelle, ou irrationnelle, les produits* ac *&* bc, *seront en même raison que les mêmes quantitez* a *&* b.

Il faut prouver que $ac . bc :: a . b$, ou; afin que la consequence soit en équation, que (n°. 29.) $abc = abc$.

Parceque les deux membres de cette équation sont semblables, il suit (n°. 29, & 31.) que ce qui étoit proposé est vrai.

COROLLAIRES.

1er. IL est clair qu'on peut multiplier les quatre termes d'une proportion, ou l'un ou l'autre des deux raports qui la forment, ou les deux antecedens, ou les deux consequens de ces raports, par telle quantité qu'on voudra, sans que ces raports cessent d'être égaux.

2e. Et parceque les raports, ou les divisions indiquées sont des fractions, il suit qu'on peut multiplier les deux termes d'une fraction par telle quantité qu'on voudra, sans que cette fraction change de valeur. Ainsi $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, en multipliant les deux termes par c.

3e. Une quantité quelconque, qui n'est point fractionnaire devient une fraction étant comparée à l'unité, ce qui n'y change rien; c'est pourquoi toute quantité qui n'est point fractionnaire, peut être changée en une fraction,

dont le dénominateur ſera telle quantité qu'on voudra. Ainſi a ou $\frac{a}{1} = \frac{ab}{b}$, en multipliant chaque terme par b.

4e. Il ſuit auſſi qu'on peut donner à des fractions des dénominateurs ſemblables, lorſqu'elles en ont de differens, ce qu'on appelle *réduire les fractions à même dénomination :* car pour cela, il n'y a qu'à multiplier les deux termes de chacune par le dénominateur de l'autre, s'il n'y en a que deux. Ainſi pour réduire à même dénomination $\frac{ab}{c}$ & $\frac{df}{g}$, ayant multiplié les deux termes de la premiere par g, & ceux de la ſeconde par c, l'on aura $\frac{abg}{cg}$ & $\frac{cdf}{cg}$ S'il y en a un plus grand nombre, on multipliera les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs des autres. Ainſi pour réduire $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{f}$, $\frac{c}{g}$ en même dénomination ; ayant multiplié les deux termes de la premiere par fg, ceux de la ſeconde par dg, & ceux de la troiſiême par df, l'on aura $\frac{afg}{dfg}$, $\frac{bdg}{dfg}$, $\frac{cdf}{dfg}$.

Il ſe trouve ſouvent des fractions que l'on peut réduire à même dénomination, ſans les changer toutes d'expreſſion. Ainſi $\frac{abb}{cd}$ & $\frac{gh}{c}$, ſeront réduites en même dénomination, en multipliant les deux termes de la ſeconde par d : car l'on aura $\frac{dgh}{cd}$.

5e. Il ſuit encore que c'eſt la même choſe de diviſer le dénominateur d'une fraction, par une quantité quelconque, ou de multiplier ſon numerateur par la même quantité. Ainſi $\frac{ab}{\frac{c}{d}} = \frac{abd}{\frac{cd}{d}} = \frac{abd}{c}$.

THEORÊME IV.

33. S*I l'on diviſe deux grandeurs quelconques* a & b *par une même grandeur* c, *rationnelle ou irrationnelle; les quotiens* $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$, *ſeront en même raiſon que les premieres grandeurs* a & b.

Il faut prouver que $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$, ou, ayant ſuppoſé $\frac{a}{c} = p$, & $\frac{b}{c} = q$, que $p . q :: a . b$, ou afin que la conſequence ſoit en équation, que $bp = aq$.

La premiere équation (Axio. 1. Coroll. 4.) donne $a = cp$, & la ſeconde, $b = cq$, d'où l'on tire (Axio. 1. Coroll. 1.) $acq = bcp$, ou en diviſant par c, $aq = bp$; donc (Th 2.) $p . q :: a . b$, ou $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$, en remettant pour p, & pour q, leurs valeurs $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$ *C. Q. F. D.*

On pourroit démontrer ce Theorême en cette ſorte. La Conſequence $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$; donne (Theor. 1.) $\frac{ab}{c} = \frac{ab}{c}$ qui eſt une équation évidente par elle-même.

2°. C'eſt auſſi par le moyen de ce Theorême que l'on réduit les raports ou fractions à leurs plus ſimples expreſſions. Ce qui ſe fait en diviſant l'antecedent & le conſequent de chaque raport par une même quantité, que l'on nomme, *commun diviſeur*, & les deux quotiens forment un autre raport, ou fraction égale à la propoſée, mais plus ſimple.

Or il eſt ſouvent aiſé d'appercevoir ce commun diviſeur, & particulierement quand les deux termes du raport que l'on veut réduire ſont incomplexes. Mais ſi on ne l'apperçoit pas par la ſeule inſpection des termes, on cherchera (art. 1. n°. 56. ou 57.) tous les diviſeurs de

l'antecedent, & tous ceux du conſequent ; & les diviſeurs de l'antecedent qui ſe trouveront auſſi parmi ceux du conſequent, ſeront des diviſeurs communs ; mais on ne ſe ſervira que du plus grand : s'il ne s'en trouve aucun parmi ceux de l'antecedent, qui ſe trouve auſſi parmi ceux du conſequent, la fraction ne pourra être réduite à de plus ſimples termes.

EXEMPLES.

EXEMPLE I. $\frac{aab}{ac}$ ſe réduit, ou eſt égal à $\frac{ab}{c}$ en diviſant chaque terme par leur commun diviſeur a.

Exemple 2. $\frac{abc\sqrt{abd}}{cx\sqrt{ag}} = \frac{ab\sqrt{bd}}{x\sqrt{g}}$ en diviſant les parties rationnelles par c, & les irrationnelles par $\sqrt{a}$.

Exemple 3. $\frac{abc\sqrt{abc}}{cd\sqrt{b}} = \frac{ab\sqrt{ac}}{d}$ en diviſant les parties rationnelles par c, & les irrationnelles par $\sqrt{b}$.

Exemple 4. $\frac{a^3}{a^3} = \frac{1}{1} = 1$, en diviſant les deux termes par a^3 : Mais (art. 1. n°. 22.) $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$; donc $a^0 = 1$, ce que nous avions ſuppoſé dans l'endroit que nous venons de citer.

Exemple 5. $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$, en diviſant chaque terme par a^3 : mais (art. 1. n°. 22.) $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5=4-2}$; donc $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, ce que nous avions encore ſuppoſé au même endroit.

Exemple 6. $\frac{25ab}{15bc} = \frac{5a}{3c}$ en diviſant chaque terme par $5b$.

Exemple 7. $\frac{aac+abc}{aa-bb} = \frac{ac}{a-b}$, en diviſant chaque terme par leur commun diviſeur $a+b$.

Exemple 8. $\frac{a^3-b^3}{aa-bb} = \frac{aa+ab+bb}{a+b}$, en diviſant chaque terme par le commun diviſeur $a-b$.

THEORÊME V.

34. *SI l'on divise une même quantité* a, *par des quantitez differentes* b *&* c, *les quotiens seront reciproquement proportionnels à leurs diviseurs.*

Il faut prouver que $\frac{a}{b} . \frac{a}{c} :: c . b$, ou, ayant supposé $\frac{a}{b} = p$, & $\frac{a}{c} = q$, que $p . q :: c . b$, ou afin que la consequence soit en équation, que $bp = cq$.

La premiere supposition donne $a = bp$, & la seconde $a = cq$; donc (Axio. 3.) $bp = cq$; & partant (Theor. 2.) $p . q :: c . b$, ou $\frac{a}{b} . \frac{a}{c} :: c . b$, en remettant pour p, & pour q, leurs valeurs $\frac{a}{b}$, & $\frac{a}{c}$. *C. Q. F. D.*

On pourroit démontrer plus simplement ce Theorême: car la consequence $\frac{a}{b} . \frac{a}{c} :: c . b$ donne (Theor. 1.) $\frac{ab}{b} = \frac{ac}{c}$, ou (art. 1. n°. 37.) $a = a$, ou, $a - a = 0$, ou $0 = 0$.

THEORÊME VI.

35. *SI trois grandeurs* a, b, c, *sont en proportion continue, la premiere* a, *sera à la troisième* c, *comme le quarré de la premiere* aa, *au quarré de la seconde* bb.

Il faut prouver que $a . c :: aa . bb$, ou afin que la consequence soit en équation, que $aac = abb$.

L'on a (Hyp.) $a . b :: b . c$; donc $ac = bb$, & partant $aac = abb$ en multipliant chaque membre par a. *C. Q. F. D.*

THEORÊME VII.

36. *LORSQUE plusieurs raports sont égaux, comme* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$, &c. *La somme des antecedens* a + c + d, *est à la somme des consequens* b + d + e, *comme celui qu'on voudra des antecedens, est à son consequent.*

Il faut prouver que $a+c+d . b+d+e :: a . b$, ou, afin que la conſequence ſoit en équation, que $ab+bc+bd=ab+ad+ae$, ou en ôtant de part & d'autre le terme ab qui ſe détruit par la réduction, $bc+bd=ad+ae$.

Les deux premiers raports égaux (Hyp.) donnent $ad=bc$, le premier & le troiſiême donnent $ae=bd$; donc (Axio. 1. Coroll. 1.) $bc+bd=ad+ae$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

37. IL ſuit de ce Theorême, que connoiſſant les deux premiers termes a & b, & le dernier c, d'une progreſſion geometrique, on trouvera aiſément la ſomme de tous les termes qui la compoſent : car nommant la ſomme des antecedens x; la ſomme des conſequens ſera $x-a+c$. Or par ce Theorême, $x . x-a+c :: a . b$; donc (Theor. 1.) $bx=ax-aa+ac$; ou, en tranſpoſant, & en ſuppoſant $a > b$, $ax-bx=aa-ac$; d'où l'on tire (Axio. 1. Cor. 5.) $x=\frac{aa-ac}{a-b}$. Ce qu'il faloit trouver.

Si $a > b$, ou ce qui eſt la même choſe, ſi la progreſſion va en diminuant, & qu'on la ſuppoſe infinie, en faiſant le dernier terme $c=0$, l'on aura $x=\frac{aa}{a-b}$, pour la valeur de tous les termes de la progreſſion : car le terme ac ſe détruit à cauſe de $c=0$.

THEORÊME VIII.

38. *LA plus grande* a *de deux quantitez inégales* a & b *a un plus grand rapport à une troiſiéme grandeur* c *que la plus petite* b; & *la même grandeur* c, *a un plus grand raport à la plus petite* b *qu'à la plus grande* a.

Il faut prouver, 1°. Que $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2°. Que $\frac{c}{b} > \frac{c}{a}$.

L'on a par l'Hyp. $a > b$; donc (par le principe précedent, & ſes explications) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, en diviſant cha-

que membre de cette inégalité par c. Ce qu'il faloit premierement démontrer.

L'on a encore (Hyp.) $a > b$, donc en multipliant chaque membre de cette inégalité par c, & divisant chaque membre par ab, l'on aura $\frac{ac}{ab} > \frac{bc}{ab}$, ou (art. 1. n°. 37.) $\frac{c}{b} > \frac{c}{a}$. Ce qu'il faloit en second lieu démontrer.

Nous avons supposé dans la Multiplication, & dans la Division, que $+ \times +$, & $- \times -$ donnoit $+$; & que $+ \times -$, ou $- \times +$ donnoit $-$. En voici la preuve, en supposant seulement que $+ \times +$ donne $+$, dont personne ne doute.

39. Soit $a - b$ à multiplier par $+ c$. Je dis que le produit sera $ac - bc$: car ayant supposé $a - b = p$; l'on aura en transposant $a = p + b$, & multipliant cette équation par $+ c$, l'on aura $ac = pc + bc$; donc en transposant, $ac - bc = pc$; donc $a - b \times + c = ac - bc$.

40. Soit presentement $a - b$ à multiplier par $- c$. Je dis que le produit sera $- ac + bc$: car ayant supposé $a - b = p$, l'on aura en transposant $a = p + b$; donc en multipliant par $- c$, l'on aura (n°. 39.) $- ac = - pc - bc$, ou $- ac + bc = - pc$; donc $a - b \times - c = - ac + bc$.

41. Je dis aussi que $\frac{ab}{-a} = - b$: car le produit du diviseur par le quotient, doit donner le dividende, ce qui n'arriveroit pas si le quotient étoit $+ b$: car $- a \times + b = - ab$, qui n'est point le dividende. Au contraire $- a \times - b = + ab$, qui est la quantité à diviser.

42. Il est de-là évident que $\frac{ab}{-d} = \frac{-ab}{d}$, puisque dans l'un & dans l'autre cas, le quotient doit être négatif, ce que nous avons aussi supposé ailleurs.

REMARQUE.

1°. TOUT le Calcul algebrique est fondé sur les trois Axiomes précedens, & sur les quatre premiers Theorê-

mes que l'on vient de démontrer. On n'a démontré les quatre derniers que pour faire voir l'uſage de notre principe, & que par ſon moyen, on peut démontrer d'une maniere qui eſt toujours la même, toutes les proprietez des raports égaux, & inégaux, des proportions, & des progreſſions geómetriques.

2°. L'on remarquera auſſi qu'en ſuivant le même principe, l'on démontrera avec la même facilité toutes les proprietez des raports, proportions, & progreſſions arithmetiques.

3°. Que l'équation qui exprime la conſequence ou la verité que l'on veut démontrer, peut toujours être délivrée de fractions, de ſignes radicaux, & réduite à ſes plus ſimples termes, avant que de chercher à lui rendre ſemblable celle qui renferme l'Hypotheſe : car une équation étant vraye dans un état, elle le ſera dans tous ceux qu'elle eſt capable de recevoir.

Il s'agit preſentement d'ajouter, ſouſtraire, multiplier, diviſer, & extraire les racines des raports, ou fractions.

Addition, et Soustraction.

43. Pour les ajouter, on les écrira de ſuite ſans changer aucun ſigne ; & pour les ſouſtraire, on les écrira de ſuite en changeant les ſignes de celles qui doivent être ſouſtraites, ſoit que leur dénominateur ſoit le même, ou non. On leur donnera enſuite un même dénominateur ; & après avoir réduit (art. 1. n°. 11.) dans l'un & l'autre cas, les numerateurs ſemblables, on prendra pour la ſomme, ou pour la difference, celles des deux expreſſions qui ſera la plus ſimple.

Exemples.

Pour ajouter $\frac{ab}{c}$ avec $\frac{ad}{c}$, l'on aura $\frac{ab+ad}{c}$. Pour ajouter $\frac{aab^4}{a^4-2aabb+b^4}$ avec $\frac{aabb}{aa-bb}$, l'on écrira $\frac{aab^4}{a^4-2aabb+b^4}+\frac{aabb}{aa-bb}$, ou après les avoir réduites en même dénomination

mination, $\frac{aab^4 + a^4bb - aab^4}{a^4 - 2aabb + b^4}$ = (art. 1. n°. 11.) $\frac{a^4bb}{a^4 - 2aabb + b^4}$ qui eſt une expreſſion plus ſimple que la premiere.

Pour ſouſtraire $\frac{ab}{c-d}$ de $\frac{aa-bb}{c}$, l'on écrira $\frac{aa-bb}{c} - \frac{ab}{c-d}$, ou, après leur avoir donné un même dénominateur $\frac{aac - bbc - aad + bbd - abc}{cc - cd}$. La premiere expreſſion eſt la plus ſimple.

Multiplication.

44. ON multipliera les numerateurs, & enſuite les dénominateurs l'un par l'autre; & les deux produits formeront une fraction que l'on réduira à ſon expreſſion la plus ſimple.

Soit $\frac{ac}{b}$ à multiplier par $\frac{bc}{d}$. Ayant ſuppoſé $\frac{ac}{b} = p$, & $\frac{bc}{d} = q$. Il faut prouver que $\frac{abcc}{bd} = pq = \frac{acc}{d}$.

La premiere ſuppoſition donne $ac = bp$, & la ſeconde, $bc = dq$; donc (Axio. 1. Coroll. 1.) $abcc = bdpq$; donc (Axio. 1. Coroll. 5.) $\frac{abcc}{bd} = pq = \frac{acc}{d}$. *C. Q. F. D.*

De même $\frac{ab}{c} \times b + \frac{cd}{b}$, ou (Theor. 3. Coroll. 3.) $\frac{ab}{c} \times \frac{bb + cd}{b} = \frac{ab^3 + abcd}{bc} = \frac{abb + acd}{c}$, en diviſant les deux termes par b. Par la même raiſon $\frac{ab}{c} \times d$, ou $\frac{d}{1} = \frac{abd}{c}$.

Définition.

45. LE produit $\frac{ac}{bd}$ de deux raports differens $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, eſt appellé *raport composé*, ou *raiſon composée*; & le produit $\frac{aa}{bb}$ d'un raport $\frac{a}{b}$, multiplié par lui-même, eſt appellé *raport doublé*, ou *raiſon doublée*.

DIVISION.

46. LE produit du numerateur du dividende par le dénominateur du diviſeur ſera le numerateur du quotient, & le produit du dénominateur du dividende par le numerateur du diviſeur, ſera le dénominateur du quotient. On réduira enſuite le quotient à ſon expreſſion la plus ſimple.

Soit propoſé le raport $\frac{ab}{c}$ à diviſer par $\frac{ac}{b}$. Ayant ſuppoſé $\frac{ab}{c} = p$, & $\frac{ac}{b} = q$. Il faut prouver que $\frac{acb}{acc} = \frac{p}{q} = \frac{bb}{cc}$.

La premiere ſuppoſition donne $ab = cp$; la ſeconde, $ac = bq$; donc (Axio. 1. Coroll. 1.) $\frac{ab}{ac} = \frac{cp}{bq}$, ou, en multipliant chaque membre par b, & diviſant chaque membre par c, $\frac{abb}{acc} = \frac{p}{q} = \frac{bb}{cc}$. *C. Q. F. D.*

De même $\frac{ac}{b}$ diviſé par d, ou par $\frac{d}{1}$, donne $\frac{ac}{bd}$.

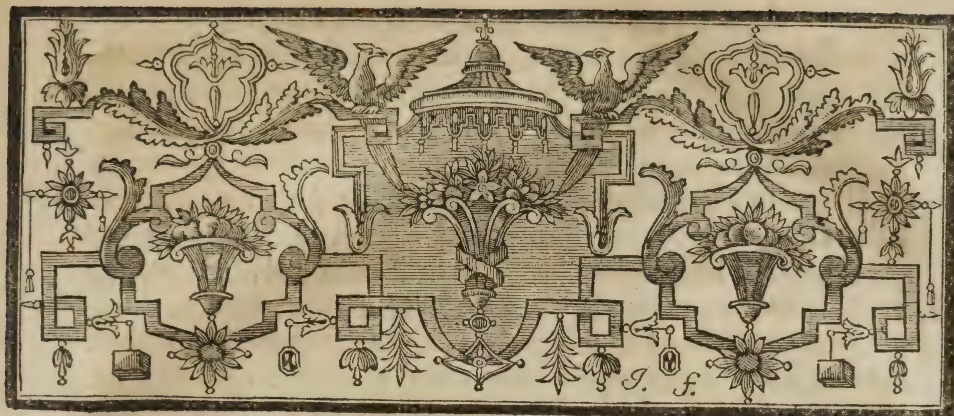
EXTRACTION

Des racines des quantitez fractionnaires.

47. IL eſt clair par les regles de la multiplication des fractions, que pour extraire leurs racines, il n'y a qu'à extraire celle du numerateur, & celle du dénominateur, & ces deux racines formeront une fraction, qui ſera la racine de la propoſée. Ainſi $\sqrt{\frac{8abbc}{4bcc}} = \frac{2b\sqrt{2ac}}{2c\sqrt{b}} = \frac{b\sqrt{2ac}}{c\sqrt{b}}$. Il en eſt ainſi des autres.

Les mêmes operations ſur les fractions irrationnelles n'ont rien de particulier.

Fin de l'Introduction.



APPLICATION DE L'ALGEBRE A LA GEOMETRIE.



SECTION PREMIERE.

Où l'on donne les définitions & les principes generaux qui servent pour resoudre les Problêmes, & démontrer les Theorêmes de Geometrie.

DÉFINITIONS.

I. IL y a deux sortes de propositions dans la Geometrie, ausquelles on peut appliquer l'Algebre, qui sont les Theorêmes & les Problêmes.

1. Les Theorêmes sont des propositions qui contiennent des veritez Geometriques qui ne dépendent d'aucune operation, & qu'il faut seulement démontrer.

2. Les Problêmes ſont d'autres propoſitions qui demandent que l'on faſſe quelque operation, & que l'on démontre que l'operation que l'on a faite, ſatisfait à la queſtion. Ce qui s'appelle reſoudre le Problême.

Il y a des Problêmes déterminez, & d'autres indéterminez.

3. Les Problêmes déterminez ſont ceux qui n'ont qu'une ſeule ſolution, ou qu'un nombre déterminé de ſolutions. Si l'on propoſe, par exemple, de couper une ligne donnée en deux également, on voit clairement que ce Problême ne peut avoir qu'une ſeule ſolution; mais ſi l'on
FIG. 1. propoſe de couper une ligne donnée AB en un point C, en ſorte que le rectangle $AC \times CB$ ſoit égal au quarré d'une autre ligne donnée EF; il eſt clair que ce Problême peut avoir deux ſolutions, & qu'il n'en peut pas avoir davantage: car ſi après avoir trouvé le point C qui ſatisfait à la queſtion, on la coupe encore en un autre point D qui ſoit autant éloigné de A que C l'eſt de B, le rectangle $AD \times DB$ ſera égal au rectangle $AC \times CB$ puiſque $AD = CB$, & $AC = DB$. Il eſt aiſé de voir qu'il n'y a point d'autre point qui puiſſe ſatisfaire au Problême.

4. Les Problêmes indéterminez ſont ceux qui ont une infinité de ſolutions: comme ſi l'on propoſe de diviſer une ligne donnée en deux parties ſans y admettre aucune autre condition, il eſt évident que tous les points de cette ligne ſatisfont au Problême. De même ſi l'on propoſe de trouver deux lignes dont le raport ſoit égal à celui de deux autres lignes données; l'on voit évidemment que les deux lignes que l'on cherche, peuvent être priſes d'une infinité de grandeurs differentes, & qui auront toujours entr'elles le même raport. Semblablement.

FIG. 2. 5. Si l'on demande de trouver un point B ſur la circonference d'un demi cercle ABC, en ſorte que la perpendiculaire BH, menée du point cherché B ſur le diametre AC ſoit moyenne proportionnelle entre les parties AH & HC du diametre AC. On ſçait que tous les points de la circonference ont cette proprieté, c'eſt-à-dire que toutes

les perpendiculaires, comme *BH* ſont moyennes proportionnelles entre *AH* & *HC* en quelqu'endroit que l'on prenne le point *B*.

DE'FINITION.

6 LES lignes droites ou courbes qui renferment, ou ſur leſquelles ſont tous les points qui reſolvent un Problême indéterminé, ſont appellez *lieux Geometriques*. Ainſi la demi circonference *ABC* eſt le lieu qui contient tous les points *B*, d'où l'on peut tirer des perpendiculaires *BH* moyennes proportionnelles entre *AH*, & *HC*. FIG. 2.

AVERTISSEMENT.

7. *Quoique l'on ſe propoſe ici de donner la maniere de démontrer les Theorêmes de Geometrie par le moyen de l'Algebre; il ne faut pas entendre cela ſi generalement qu'il n'y en ait quelques-uns d'exceptez: car il y en a d'Elementaires où l'Algebre n'a point de priſe. On ne peut, par exemple, démontrer par l'Algebre que les côtez homologues des triangles ſemblables ſont proportionnels. Il en eſt de même de pluſieurs autres; & c'eſt particulierement de ces deux Theorêmes que l'Algebre a beſoin, & par le moyen deſquels on vient à bout de tout, comme on verra dans toute l'étendue de cet Ouvrage. Soit qu'il s'agiſſe de reſoudre un Problême, ou de démontrer un Theorême de Geometrie par le moyen de l'Algebre, il eſt toujours neceſſaire de trouver des équations & pour ce ſujet il faut nommer toutes les lignes connues & inconnues qui y peuvent ſervir, par des lettres de l'Alphabet, avec cette difference que l'on nommera les données ou connues, ou déterminées, ou conſtantes par les premieres* a, b, c, d, &c. *& les inconnues ou indéterminées, ou variables par les dernieres*, r, ſ, t, u, x, y, z.

Et parcequ'il y a ſouvent pluſieurs chemins pour trouver les équations neceſſaires pour la démonſtration d'un Theorême, ou pour la réſolution d'un Problême, on pourroit prendre celui qui ſe preſenteroit le premier s'ils conduiſoient tous à des équations également ſimples, & d'où l'on pût tirer des conſtructions également élegantes: mais comme l'on arrive quelquefois à des équa-

tions très-composées, en suivant certaines routes, & que l'on arriveroit à de très-simples en en suivant d'autres; il s'ensuit que lorsqu'on ne trouve pas les premieres équations ausquelles on est parvenu par les premieres suppositions, assez simples, il en faut chercher d'autres par d'autres voyes, & ne se point rebuter: car lorsqu'un Problème est simple de sa nature, on trouve ordinairement des équations simples pour le resoudre: mais parceque pour trouver des équations simples, cela dépend particulierement des lignes que l'on nomme par des lettres inconnues, c'est-à-dire, qu'en nommant certaines lignes par des lettres inconnues, on arrive à des équations très composées, au lieu qu'en en nommant d'autres par les mêmes lettres inconnues, on arrive souvent à des équations très-simples.

8. *On ne peut donner de regles précises pour déterminer parmi les lignes inconnues celles que l'on doit nommer par des lettres inconnues, pour parvenir aux équations les plus simples, ni pour tirer certaines lignes qui sont necessaires tant pour la démonstration des Theorèmes, que pour la resolution des Problèmes, mais l'on peut faire certaines remarques, & établir certains principes qui ne laissent pas d'avoir un grand usage dans l'un & l'autre cas. On les trouvera ailleurs.*

PRINCIPES GENERAUX
Pour appliquer l'Algebre à la Geometrie.

II. LORSQU'IL s'agit de resoudre un Problême, ou de démontrer un Theorême de Geometrie, on doit premierement bien entendre ce dont il s'agit, c'est-à-dire l'état de la question, & bien remarquer les qualitez des lignes qui doivent former la figure sur laquelle on doit operer: car il y a des lignes données de position seulement; d'autres données de grandeur, & de position tout ensemble; d'autres données de grandeur, & non de position; & d'autres enfin qui ne sont données ni de grandeur, ni de position.

1. Les lignes données de position seulement, sont celles dont la situation est invariable & toujours la même, mais

dont la longueur n'eſt point déterminée : comme la ligne *EFG*, qui étant une fois poſée dans une ſituation perpendiculaire au prolongement du diametre *AC* d'un demi cercle *ABC*, à une certaine diſtance du point *C*, ne peut avoir aucune autre poſition. FIG. 2.

Les lignes données de grandeur & de poſition tout enſemble, ſont celles qui ne peuvent changer de ſituation, & dont la longueur eſt déterminée, de ſorte qu'elles ne peuvent ni alonger ni acourcir : comme le diametre *AC* du demi cercle *ABC*, qui étant une fois poſé dans une ſituation perpendiculaire à la ligne *FG*, ne peut avoir aucune autre poſition.

Les lignes données de grandeur, & qui ne le ſont point de poſition, ſont celles dont la grandeur ne peut varier ; quoique leur ſituation puiſſe changer, comme le demi diametre *DB*, qui demeure toujours de même grandeur en quelque endroit de la circonference *ABC* que l'on prenne le point *B*. Les lignes données de grandeur ſont auſſi appellées lignes *connues* ou lignes *conſtantes*, & on les nomme par des lettres connues, *a*, *b*, *c*, *d*, *&c.* FIG. 2.

Les lignes qui ne ſont données ni de grandeur ni de poſition, ſont celles qui en changeant de places, changent auſſi de grandeur, comme la perpendiculaire *BH* qui changera de grandeur & de place autant de fois que le point *H* s'éloignera ou s'approchera du point *D*. Les lignes qui ne ſont données ni de grandeur ni de poſition, ſont auſſi appellées lignes *inconnues*, *indéterminées*, ou *variables*, & on les nomme par des lettres inconnues *x*, *y*, *z*, *&c.*

2. Lorſqu'on veut reſoudre un Problême, on le doit conſiderer comme déja reſolu, & ayant mené les lignes que l'on juge neceſſaires, l'on nommera celles qui ſont connues par des lettres connues, & celles qui ſont inconnues par des lettres inconnues, & ſans faire de diſtinction entre les quantitez connues & inconnues, on examinera les qualitez de la queſtion, & l'on cherchera le moyen d'exprimer une même quantité en deux manieres differentes ; & ces deux expreſſions d'une même quantité étant égalées l'une

à l'autre, donneront une équation qui resoudra le Problême, qui sera déterminé, si elle ne renferme qu'une seule lettre inconnue.

Mais si elle renferme plusieurs lettres inconnues, il faut tâcher par le moyen des differentes conditions du Problême de trouver autant d'équations que l'on aura employé de lettres inconnues, afin que les faisant évanouir, de la maniere qu'il est enseigné dans tous les livres d'Algebre, l'on ait enfin une équation qui n'en renferme qu'une seule; cette équation étant reduite, s'il est necessaire, à ses plus simples termes par les manieres ordinaires expliquées dans les mêmes livres d'Algebre, donnera la solution du Problême qui sera encore déterminé.

Si l'on ne peut trouver autant d'équations que l'on a employé de lettres inconnues, de sorte qu'il reste au moins deux inconnues dans la derniere équation, le Problême sera indéterminé, & aura une infinité de solutions. Enfin, si dans la derniere équation il restoit trois ou un plus grand nombre de lettres inconnues, le Problême seroit encore indéterminé, mais il seroit d'une autre espece dont nous ne parlerons point.

Il est souvent facile de reconnoître par les qualitez d'un Problême, s'il est déterminé ou indéterminé; auquel cas on sçait, si ayant employé deux inconnues, on doit trouver deux équations, ou si l'on n'en doit trouver qu'une seule : mais il arrive aussi quelquefois que cela n'est pas si facile à distinguer, & c'est en ce cas qu'il faut tâcher de trouver autant d'équations qu'on a employé d'inconnues, afin de déterminer par ce moyen la qualité du Problême.

On n'explique point plus au long ce principe; car tout ce Traité n'en est que l'application. On se contentera de faire ici quelques réflexions sur les équations qui ne contiennent qu'une seule, ou deux lettres inconnues, c'est-à-dire sur les équations déterminées, & sur les indéterminées.

DES

DES EQUATIONS DETERMINE'ES.

3. ON sçait que la lettre inconnue de ces équations, a autant de valeurs ou de racines, qu'elle a de dimensions dans le terme où elle est le plus élevée, que ces valeurs sont vrayes, fausses, ou imaginaires; on ne dit pas qu'elles soient toutes d'une même espece dans une même équation : car dans une même équation il y en a quelquefois des trois especes, de vrayes, de fausses & d'imaginaires.

Les racines vrayes ou positives sont celles qui sont précedées du signe +: comme $x = + a$.

Les racines fausses ou negatives sont celles qui sont précedées du signe —: comme $x = - a$. Les racines fausses sont d'un grand usage dans la Geometrie; car comme elles sont autant réelles que les racines positives, elles servent à déterminer les positions des courbes autant que les positives, dont elles ne different qu'en ce que les positives devant être prises d'un côté d'un point ou d'une ligne, les fausses doivent être prises de l'autre, comme on verra dans la suite.

Les racines imaginaires sont celles qui sont sous un signe radical avec le signe —, dont l'exposant est un nombre pair: comme $x = \sqrt{-ab}$; & comme la valeur de ces racines ne peut être exprimée, on les regarde comme nulles ou $= 0$; de sorte que $x = \sqrt{-ab}$ doit être regardée comme $x = 0$.

Dans toutes les équations où il n'y a que deux termes tous deux positifs, l'un connu & l'autre inconnu, si l'exposant de l'inconnue est un nombre pair, elle aura deux valeurs réelles, l'une positive & l'autre negative; toutes les autres seront imaginaires. Par exemple, de $xx = aa$, l'on tire $x = + a$, & $x = - a$; car en quarrant les deux membres de ces deux équations l'on a toujours $xx = aa$, puisque $- \times -$ donne + aussi bien que $+ \times +$, & en general de $x^p = a^p$ (p. signifie un nombre pair quelconque) l'on tire $x = \pm a$: ce qui se prouve comme on vient de faire, en élevant l'un & l'autre membre à la puissance paire p; car l'on aura toujours $x^p = + a^p$.

Si l'un des termes eſt poſitif & l'autre negatif, toutes les valeurs de l'inconnue ſeront imaginaires : car on n'aura jamais le ſigne de — après avoir élevé une quantité negative à une puiſſance paire : par exemple $-a$ élevé à une puiſſance paire p donnera toujours $+a^p$, & jamais $-a^p$.

Si l'expoſant de l'inconnue eſt un nombre impair, l'inconnue n'aura qu'une racine réelle qui eſt poſitive, lorſque les deux termes des équations ſont poſitifs ; negative lorſqu'un d'eux eſt negatif, toutes ſes autres racines ſont imaginaires : par exemple, de $x^3 = a^3$, on tire $x = a$, & non pas $x = -a$, & de $x^3 = -a^3$, on tire $x = -a$ & non pas $x = a$; car le cube d'une grandeur poſitive eſt toujours poſitif, & celui d'une quantité negative eſt toujours negatif. Et en general de $x^q = +a^q$ (q ſignifie un nombre impair) on tire $x = +a$; de même, de $x^q = -a^q$ on tire $x = -a$: car $+a$ élevé à une puiſſance impaire q donne $+a^q$: & $-a$ élevé à une puiſſance impaire q donne toujours $-a^q$.

On fera les mêmes raiſonnemens ſur les équations compoſées : par exemple $xx = aa + bb$ donne $x = \pm \sqrt{aa + bb}$, $xx = aa - bb$ donne $x = \pm \sqrt{aa - bb}$: mais en ce cas ſi b ſurpaſſe a, les deux valeurs de x ſeront imaginaires. $xx = \pm ax \mp bb$ donne $x = \pm \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa \mp bb}$: car en tranſpoſant l'on aura $xx \mp ax = \mp bb$; & ajoutant $\frac{1}{4} aa$ de part & d'autre pour rendre le premier membre quarré, l'on aura $xx \mp ax + \frac{1}{4} aa = \frac{1}{4} aa \mp bb$; donc en extrayant la racine quarrée de part & d'autre, l'on a $x \mp \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa \mp bb}$, ou $x = \pm \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa \mp bb}$. Il en eſt ainſi des autres. Mais il faut remarquer que ſi dans ce dernier exemple, & dans les ſemblables, bb a le ſigne de —, & que b ſurpaſſe $\frac{1}{2} a$, la valeur de x ſera imaginaire ; car puiſque la quantité $\frac{1}{4} aa - bb$ qui eſt ſous le ſigne *radical*, eſt alors negative $\sqrt{\frac{1}{4} aa - bb}$ ſera une quantité *imaginaire* ; & par conſequent auſſi $\pm \frac{1}{2} a \pm$

$\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$: car une quantité imaginaire étant combinée par addition ou ſouſtraction avec une quantité réelle, rend le tout imaginaire.

4. On connoît la nature d'un Problême déterminé par le plus haut degré, ou ce qui eſt la même choſe, par la plus haute puiſſance de l'inconnue, qui ſe trouve dans l'équation qui ſert à le réſoudre, en ſuppoſant que cette équation ſoit réduite à ſon expreſſion la plus ſimple. De ſorte que lorſqu'en réſolvant un Problême, on vient à une équation où l'inconnue n'a qu'une dimenſion : comme $x = \frac{ab}{c}$, qui eſt une équation du premier degré, le Problême eſt appellé *ſimple.*

Lorſqu'on trouve une équation où l'inconnue a deux dimenſions : comme $xx = ax + bb$, qui eſt une équation du ſecond degré, le Problême eſt nommé *plan.*

Lorſqu'on trouve une équation où l'inconnue a trois ou quatre dimenſions, comme $x^3 = aab$, ou $x^4 = a^3 b$, qui ſont des équations du troiſiême & du quatriême degré, le Problême eſt nommé *ſolide.*

Lorſqu'on vient à une équation où l'inconnue eſt élevée au-delà du 4e degré, le Problême eſt nommé *lineaire.*

5. Quand une équation déterminée a tous ſes termes, le nombre en eſt plus grand de l'unité, que l'expoſant de la plus haute puiſſance de la lettre inconnue qu'elle renferme. Ainſi une équation du ſecond degré ne peut avoir que trois termes; une équation du troiſiême degré, n'en peut avoir que quatre; une du quatriême, cinq; & ainſi des autres. Mais il y manque ſouvent quelqu'un des termes moyens, quelquefois il en manque pluſieurs, & quelquefois ils y manquent tous.

Le premier terme d'une équation, eſt celui où l'inconnue eſt élevée à une puiſſance plus haute que dans tout autre terme. Le ſecond, eſt celui où elle eſt moins élevée d'une dimenſion. Le troiſiême, celui où elle eſt moins élevée de deux dimenſions; & ainſi de ſuite. Le dernier, eſt celui où elle ne ſe trouve point du tout.

Mais il faut remarquer qu'il se rencontre souvent dans une équation des termes *complexes*, ou composez de plusieurs quantitez Algebriques, jointes ensemble par + ou par —, qui sont ceux où l'inconnue se trouve élevée à la même puissance, ou bien ceux où elle ne se trouve point du tout. Par exemple, ces quantitez $axx - bxx + cxx$, ou $abb - bcc + d^3$, ne doivent être regardées que comme un seul terme.

On écrit ordinairement le premier terme d'une équation seul dans le premier membre, & tous les autres dans le second, selon leur ordre; ou bien on les égale tous à zero, en les écrivant tous dans le premier membre de l'équation, selon leur ordre; & en écrivant o seul dans le deuxiéme, en observant que le premier soit toujours simple, & délivré de toute quantité connue, comme on voit dans l'équation suivante.

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - abx & + a^3. & \\ \quad - cxx & + bcx & - aab & = 0. \\ \quad + dxx & & + bcc. & \end{array}$$

DES EQUATIONS INDETERMINE'ES.

III. LES équations où il se rencontre deux lettres inconnues, qu'on appelle aussi équations *locales*, servent à construire les Problêmes indéterminez, comme celles où il ne s'en rencontre qu'une, servent à construire les Problêmes déterminez. Mais parceque tant qu'il y a dans une équation deux lettres inconnues, en les regardant comme telles, on ne peut connoître ni l'une ni l'autre; c'est pour cela qu'on est obligé d'assigner à l'une des deux, une valeur arbitraire; & la regardant ensuite comme donnée, on pourra connoître la valeur de l'autre.

Et comme on peut assigner à la même inconnue une infinité de valeurs l'une après l'autre, l'autre inconnue en pourra aussi avoir une infinité. Mais en donnant ainsi differentes valeurs à une des inconnues d'une équation,

on doit, à chaque fois, regarder cette équation comme une équation determinée ; & par consequent lui attribuer tout ce qu'on a dit dans l'Article précedent des équations déterminées. En effet, résoudre, ou plutôt construire un Problême indéterminé, c'est construire une infinité de fois un Problême déterminé.

REMARQUE.

1. LES valeurs arbitraires que l'on assigne à une des lettres inconnues d'une équation indéterminée, doivent souvent être limitées, & être renfermées dans certaines bornes. Et si elles excedent ces bornes, les valeurs de l'autre inconnue, seront ou negatives ou imaginaires. Par exemple, dans cette équation $x = b - y$, toutes les valeurs arbitraires que l'on peut donner à l'inconnue y ne doivent point exceder la grandeur donnée b, autrement celles de x seroient negatives ; ce qui est évident. Si l'on fait $y = 0$, l'on aura $x = b$; & si l'on fait $y = b$, l'on aura $x = 0$; car l'équation deviendra $x = b - b = 0$. Dans cette équation $xx = aa - yy$, les valeurs arbitraires que l'on peut donner à l'inconnue y, ne doivent point exceder la grandeur donnée a : car autrement les valeurs de x seroient imaginaires, puisque tout le second membre de l'équation seroit negatif. Si l'on fait $y = a$, l'on aura $xx = aa - aa = 0$, & si l'on faisoit $y = 0$, l'on auroit $xx = aa$; donc $x = \pm a$. Mais dans cette équation $ax = by$, on peut donner telle valeur que l'on voudra à l'inconnue y : car x aura toujours une valeur positive, à moins que l'on ne fasse $y = 0$, auquel cas l'on aura $ax = 0$, ou $x = \frac{0}{a} = 0$.

THEORÊME.

2. *SI l'on assigne à une des inconnues d'une équation indéterminée du premier degré, où elles ne sont multipliées ni par elles-mêmes, ni entr'elles, tant de valeurs arbitraires qu'on voudra. Je dis que tous les points qui détermineront les valeurs correspondantes de l'autre inconnue, seront dans une ligne droite.*

DÉMONSTRATION.

SOIT l'équation $ay = bx$, en la réduiſant en Analogie l'on a $a.\ b :: x.\ y$; ſoit preſentement une ligne droite AH, dont le point A ſoit fixe; & ayant pris ſur AH l'intervale AB égal à la ligne donnée a, mené par le point B, la ligne BC égale à la ligne donnée b, qui faſſe avec AH tel angle qu'on voudra, & mené par A & C, la droite AG indéfiniment prolongée. Il eſt clair qu'ayant pris ſur AH un point quelconque D, mené DE parallele à BC; & nommé AD, x; & DE, y; l'on aura toujours $a.\ b :: x.\ y$, en quelque endroit de la ligne AH que l'on prenne le point D, ou ce qui eſt la même choſe, quelque grandeur arbitraire que l'on aſſigne à l'inconnue x, celle de y ſera toujours déterminée par la ligne AG. De ſorte que la ligne AG eſt le lieu qui renferme tous les points qui ſatisferont au Problême, qui doit être reſolu par l'équation propoſée $ay = bx$. C. Q. F. D.

FIG. 3.

COROLLAIRE I.

3. SI l'équation propoſée étoit déterminée, comme $ay = bc$, ce ſeroit toujours la même choſe, excepté que la lettre c qui tient la place de x, eſt conſtante; ainſi ayant pris ſur AH, $AD = c$, & mené DE parallele à BC; DE ſera la valeur de y; mais en ce cas de tous les points de la ligne AG, il n'y a que le ſeul point E qui réſout le Problême, puiſque $AD = c$ ne peut avoir differentes valeurs.

FIG. 3.

COROLLAIRE II.

4. D'Où l'on voit que les équations déterminées, & indéterminées du premier degré, ſont de même genre; puiſqu'elles ſe conſtruiſent par les mêmes lignes, & de la même maniere.

COROLLAIRE III.

5. SI dans l'équation précedente $ay = bx$, a étoit égale à b, elle deviendroit $y = x$; & il n'y auroit alors qu'à faire $BC = AB$; & aſſignant à x la valeur arbitraire AD; FIG. 3.
DE (y) parallele à BC, ſeroit égale à $AD = x$.

COROLLAIRE IV.

6. IL eſt évident que dans toutes les équations indéterminées du premier degré, les inconnues ont entre elles un raport conſtant, c'eſt-à-dire, qu'elles ſont l'une à l'autre comme une ligne donnée, à une ligne donnée, ou en raiſon d'égalité: comme dans l'équation précedente $ay = bx$, où $x. y :: a. b$, & dans celle-ci $y = x$, ou $x. y :: 1. 1$.

COROLLAIRE V.

7. ON voit auſſi que dans les équations indéterminées du premier degré, une des inconnues croiſſant ou diminuant, l'autre croît auſſi ou diminue; qu'elles peuvent toutes deux augmenter ou diminuer à l'infini, en gardant toujours entre elles le même raport.

THEORÊME.

8. S*I dans une équation indéterminée qui n'eſt point du premier degré, & où par conſequent les deux lettres inconnues ſont multipliées ou par elles-mêmes, ou entre elles, de quelque maniere que ce puiſſe être, l'on aſſigne à l'une des deux tant de valeurs arbitraires qu'on voudra. Je dis que tous les points qui détermineront les valeurs correſpondantes de l'autre, ſeront dans une ligne courbe.*

DEMONSTRATION.

DANS les équations à la ligne droite, les inconnues gardent toujours (n°. 6.) entre elles un raport conſtant. Or lorſque dans une équation, les deux lettres inconnues ſont multipliées ou par elles-mêmes, ou entre elles, ou

de l'une & de l'autre maniere tout ensemble ; elles ou les lignes qu'elles expriment, ne peuvent garder le même raport dans toutes les variations ou changemens de valeur qu'elles peuvent recevoir : car il faudroit pour cela, que l'une des deux fût dans un des membres de l'équation, & l'autre dans l'autre, toutes deux seules, ou accompagnées seulement de lettres connues. Mais par l'hypothese, ces deux lettres sont multipliées ou par elles-mêmes ou entre elles ; donc elles ne peuvent garder un raport constant dans tous les changemens de valeur qu'on leur peut assigner : c'est pourquoi, en assignant tant de valeurs que l'on voudra à l'une des deux, les valeurs relatives de l'autre ne peuvent être déterminées par une ligne droite. Il faut donc qu'elles le soient par une ligne courbe. *C. Q. F. D.*

C'est ici la preuve generale, chaque équation en fournit de particulieres, en les comparant à l'équation à la ligne droite, comme on va voir par l'exemple qui suit.

EXEMPLE.

9. SOIT l'équation $yy = aa - xx$, qui est du second degré ; Il est clair, 1°. Que x croissant, y diminue : car le second membre de l'équation devient d'autant plus petit, que x devient grande. 2°. On ne peut pas augmenter x en sorte qu'elle surpasse la ligne exprimée par a : car le second membre deviendroit negatif ; & la valeur de y seroit par consequent imaginaire. 3°. Si l'on fait $x = a$, l'équation deviendra $yy = aa - aa = 0$. Il est donc évident que cette équation ne se rapporte point à la ligne droite ; puisque ses qualitez sont toutes differentes de celles des équations du premier degré ; & partant qu'elle se rapporte à une ligne courbe.

Pour déterminer & décrire cette courbe par le moyen
FIG. 4. de son équation $yy = aa - xx$. Soit une ligne droite CH, donnée de position dont l'extrêmité C soit fixe, & dont les parties CP soient nommées x ; soit une autre ligne CG perpendiculaire à CH, & dont les parties CQ soient nommées,

mées, y; ſoit auſſi une ligne donnée KL nommée, a; ayant mené PM parallele à CG, & QM parallele à CH; QM ſera $= CP = x$, & $PM = CQ = y$.

Si l'on aſſigne préſentement tant de valeurs différentes qu'on voudra à l'une des inconnues x (CP) l'on déterminera par la Geometrie, les valeurs correſpondantes de y (PM). De ſorte que tous les points M ſeront à la courbe à laquelle ſe rapporte l'équation propoſée $yy = aa - xx$.

Suppoſons premierement $x = 0$; le point P tombera en C, & le point M, ſur la ligne CG; & effaçant dans l'équation, le terme xx, qui devient nul par la ſuppoſition de $x = 0$, l'on aura $yy = aa$, donc $y = \pm a$; c'eſt pourquoi ſi on prolonge CG du côté de C; & qu'on faſſe Ce, & CE chacun $E = KL = a$; CE ſera la valeur poſitive de y, & Ce ſa valeur negative, & les points E & e, ſeront à la courbe dont il s'agit.

Suppoſons en ſecond lieu $y = 0$, le point Q ſe confondra avec le point C, le point M tombera ſur CH, & l'on aura $0 = aa - xx$, ou $xx = aa$; donc $x = \pm a$; c'eſt pourquoi, ſi l'on prolonge CH du côté de C, & qu'on prenne de part & d'autre du point C, CB & CA chacune égale $KL = a$; CB ſera la valeur poſitive de x, & CA ſa valeur negative, & les points B & A, ſeront à la même courbe en queſtion. D'où l'on voit déja que les quatre points A, E, B, e, ſont également diſtans du point C.

Si l'on aſſigne à x une valeur quelconque CP moindre que CB pour déterminer la valeur de $PM = y$, l'on aura en extrayant la racine quarrée $y = \pm \sqrt{aa - xx}$ d'où l'on tire cette conſtruction. Ayant prolongé PM du côté de P; du point C pour centre, & pour demi diametre l'intervalle $KL = a$, l'on décrira un cercle qui coupera PM en M & m; PM ſera la valeur poſitive de y, & Pm ſa valeur negative, & les points M, m ſeront à la courbe cherchée; car à cauſe du triangle rectangle CPM; l'on a $PM^2 = CM^2 - CP^2$, c'eſt-à-dire en termes Algebriques $yy = aa - xx$; donc $y = \pm \sqrt{aa - xx}$.

Or il eſt évident que pour déterminer la valeur de y (PM) dans toutes les poſitions du point P, il faudra décrire un cercle du centre C, & du rayon KL; c'eſt pourquoi ce cercle eſt lui-même la courbe cherchée, ce qui d'ailleurs étoit facile à remarquer : mais on a jugé à propos de faire ſur l'équation au cercle, qui eſt la plus ſimple de toutes les courbes, les raiſonnemens que l'on vient de faire, pour donner une idée de ceux que l'on doit faire ſur les équations aux autres courbes, afin de les décrire par leur moyen, d'en marquer les principales déterminations, & d'en découvrir les principales proprietez.

COROLLAIRE I.

10. ON voit clairement qu'au lieu d'avoir aſſigné à x, dans l'équation précedente, des valeurs CP priſes ſur CH pour trouver tous les points M, m, ou pour déterminer les valeurs correſpondantes de $y = PM$, l'on auroit pû regarder x comme inconnue, & aſſigner à y des valeurs CQ priſes ſur CG, qui auroient ſervi à déterminer de la même maniere les valeurs correſpondantes de $x = QM = CP$, en tirant de l'équation précedente, $x = \sqrt{aa - yy}$.

COROLLAIRE II.

11. IL eſt clair que ſi une des inconnues x de cette équation $yy = aa - xx$ devenoit une conſtante, la valeur de l'autre y pourroit de même être déterminée par le moyen du cercle; d'où il ſuit en general que toutes les équations déterminées du ſecond degré peuvent être conſtruites par le moyen du cercle, & qu'elles ſont de même genre que les équations indéterminées du même ſecond degré.

REMARQUES.

12. ON remarquera 1°. Que dans toutes les poſitions du point P, la ligne PM doit toujours demeurer parallele à CG; & que dans toutes les poſitions du point Q, la ligne QM doit toujours demeurer parallele à CH.

2°. Qu'il y a toujours deux points, l'un (*P*) ſur *CH*, & l'autre (*Q*) ſur *CG*, qui peuvent ſervir également à déterminer un même point (*M*). 3°. Que tout ce qu'on vient de dire du cercle ſe peut appliquer à toutes les autres courbes, lorſqu'il s'agit de les décrire par le moyen de leurs équations.

DÉFINITIONS.

13. DANS toutes les courbes, les lignes droites (*CH*) dont au moins une des extrêmitez (*C*) eſt fixe, & dont les parties (*CP*) ſont nommées par l'inconnue de l'équation à qui on donne des valeurs arbitraires (*CP*) pour déterminer la grandeur de la ligne (*PM*) exprimée par l'autre inconnue, ſont nommées *axes* ou *diametres* de ces courbes.

14. Les mêmes parties (*CP*) ſont nommées *abciſſes* ou *coupées*.

15. Les lignes (*PM*) exprimées par l'inconnue de l'équation dont on cherche la valeur eu ſuppoſant l'autre inconnue comme donnée à chaque poſition du point *P*, & qui demeurent paralleles à elles-mêmes, pendant que le même point *P* change de place, ſont nommées *appliquées*, ou *ordonnées* à l'axe *CH*.

16. Parceque *QM* eſt égale & parallele à *CP*, & *CQ* à *PM*, & que le point *Q* pris ſur *CG* peut ſervir à trouver le point *M* auſſi bien que le point *P*; on peut prendre *CG* pour l'axe ou le diametre de la courbe; *CQ* pour l'abciſſe, ou coupée; & *QM*, pour l'appliquée ou ordonnée; c'eſt pourquoi on nommera *CH*, & *CG*, *axes* ou *diametres conjuguez*; *CP* & *PM*, ou *CQ* & *QM* enſemble *coordonnées*; le parallelogramme *CPMQ* formé par les coordonnées, le parallelogramme des coordonnées; & le point *C*, le *commencement*, ou *l'origine* des coordonnées.

17. Les équations indéterminées ne ſervent pas ſeulement à conſtruire les Problêmes indéterminez, ou à décrire les courbes auſquelles elles ſe rapportent, & dont elles expriment la nature. On pourroit encore par leur

moyen conſtruire tous les Problêmes déterminez : car il n'y a point de Problême déterminé, quelque ſimple qu'il puiſſe être, où pour le réſoudre, on ne puiſſe employer deux lettres inconnues, & trouver par conſequent deux équations indéterminées, qui étant conſtruites enſemble, ſelon les regles qu'on donnera dans la ſuite, les lignes droites ou courbes, auſquelles elles ſe rapportent, détermineroient par leur interſection les points qui ſatisferoient aux Problêmes, d'où l'on auroit tiré ces équations. On pourroit auſſi tirer de ces ſortes de conſtructions des démonſtrations très-ſimples, à la maniere des Anciens. Mais il arriveroit quelquefois que les Problêmes ne ſeroient pas tous conſtruits avec les lignes les plus ſimples qu'ils le puiſſent être, quoique d'ailleurs la conſtruction en fût très-ſimple. Or ſelon M^r *Deſcartes*, & ſelon la raiſon même, c'eſt un vice en Geometrie d'employer dans la conſtruction d'un Problême des lignes plus compoſées que celles qu'exige ſa nature.

On trouvera dans l'art. 4. n°. 17, 18, 19, 20 & 21, des regles pour faire connoître quand un Problême déterminé peut être conſtruit par le moyen de deux équations indéterminées. En voici pour diſtinguer les courbes les plus ſimples d'avec les plus compoſées.

18. C'eſt le degré d'une équation indéterminée qui fait connoître que la courbe dont elle exprime la nature eſt plus ou moins ſimple. Et le degré d'une équation eſt déterminé par la plus haute puiſſance de celle des deux inconnues, qui eſt la plus élevée, lorſqu'elles ne le ſont pas également, ou par le produit des deux inconnues, quand il s'y rencontre, & qu'il a plus de dimenſions que les mêmes inconnues dans les autres termes. Ainſi lorſque dans une équation, l'une ou toutes les deux inconnues, ſoit qu'elles ſoient multipliées, ou par elles-mêmes, ou entr'elles, ont deux dimenſions ; comme $ax = yy$, ou $ax - xx = yy$, ou $xy = ab$; l'équation eſt du *ſecond degré*, & la courbe dont elle exprime la nature, eſt du *premier genre*.

Lorſque l'une ou toutes les deux, ou leur produit, a trois dimenſions, comme $x^3+axy=a^3$, ou $x^3-axy=y^3$, ou $xxy=ayy+a^3$, l'équation eſt du *troiſième degré*, & la courbe dont elle exprime la nature, eſt du *ſecond genre*, & ainſi de ſuite. Or on convient que les courbes du premier genre ſont plus ſimples que celles du ſecond ; & celles-ci plus que celles du troiſiême, *&c.* C'eſt pourquoi ce ſeroit un vice de conſtruire un Problême par le moyen d'une courbe du ſecond genre, lorſqu'il peut être conſtruit par le moyen d'une courbe du premier. Il en eſt ainſi des autres genres.

REMARQUE.

19. LORSQU'ON décrit une courbe par le moyen de ſon équation, on regarde une des lettres inconnues qu'elle renferme, comme donnée à chaque fois qu'on change ſa valeur pour déterminer la valeur correſpondante de l'autre, on doit donc auſſi regarder à chaque fois l'équation, comme une équation déterminée ; & parceque les équations déterminées, ſont d'autant plus faciles à conſtruire, que leurs inconnues ont moins de dimenſions ; il eſt à propos dans les équations indéterminées, où les inconnues ne ſont pas également élevées, de prendre pour conſtante, celle qui a plus de dimenſions ; & pour inconnue, celle qui en a moins.

Et puiſque trouver un point d'une courbe, c'eſt réſoudre un Problême déterminé ; lorſque dans une équation indéterminée, l'inconnue que l'on ne prend point pour conſtante, n'aura qu'une dimenſion, la deſcription de la courbe dépendra de la conſtruction des Problêmes ſimples déterminez. Lorſque cette inconnue aura deux dimenſions, la deſcription de la courbe dépendra de la conſtruction des Problêmes plans ; lorſqu'elle en aura trois ou quatre, la deſcription de la courbe dépendra de la conſtruction des Problêmes ſolides ; & lorſqu'elle en aura un plus grand nombre, la deſcription de la courbe dépendra de la conſtruction des Problêmes lineaires.

On remarquera auſſi que toutes les operations que l'on fait en Geometrie, dépendent de la Geometrie plane, c'eſt-à-dire de la conſtruction des équations déterminées du premier & du ſecond degré; c'eſt pourquoi lorſque l'inconnue que l'on ne prend point pour conſtante dans une équation indéterminée, aura plus de deux dimenſions, on ne pourra conſtruire cette équation par elle-même, il la faudra changer en deux autres équations, où l'une des inconnues n'excede point deux dimenſions; & par le moyen de ces deux équations, on décrira les deux courbes dont elles exprimeront la nature, & leur interſection ſera un des points de la courbe dont l'équation propoſée exprime la nature.

En déterminant le genre des courbes, comme on a dit (n°. 17.) on trouvera que le premier genre n'en renferme que quatre, qui ſont le cercle, la parabole, l'ellipſe & l'hyperbole. De ſorte que toutes les équations du ſecond degré appartiennent à quelqu'une de ces quatre courbes. Mais comme le cercle, à cauſe de ſa deſcription qui eſt très-ſimple, paſſe pour la plus ſimple des quatre, ce ſeroit encore un vice en Geometrie, d'employer une des trois autres, lorſque le cercle peut y être employé ſeul.

C'eſt parceque l'on conſtruit la plus grande partie des Problêmes de Geometrie par le moyen de ces quatre courbes, que je me ſuis déterminé à donner dans cet Ouvrage les élemens de la parabole, de l'ellipſe & de l'hyberbole, les proprietez du cercle étant aſſez connues d'ailleurs, afin de n'y ſuppoſer que les ſimples élemens de Geometrie.

Les Geometres diſtinguent deux ſortes de courbes; les courbes *Geometriques*, & les courbes *Méchaniques*.

20. Les courbes geometriques, ſont celles dont les axes ou les diametres conjuguez, & les coordonnées ſont des lignes droites, qui peuvent toujours former un parallelogramme, que nous avons nommé (n°. 16.) le parallelogramme des coordonnées, & qui ont des équations reglées qui expriment le raport que ces coordonnées ont entr'elles; & dont on peut trouver par le moyen de ces

équations, non ſeulement tous les points, mais tel point qu'on voudra, indépendamment des autres.

21. Les courbes méchaniques ſont celles dont les coordonnées ſont l'une ou l'autre, ou toutes deux des courbes non rectifiables, ou, dont l'une des coordonnées les rencontre en une infinité de points. Et comme dans l'équation qui exprime la nature d'une courbe, l'une des deux lettres inconnues doit avoir au moins autant de dimenſions, qu'il y a de points où la ligne exprimée par cette inconnue rencontre la courbe, il faudroit que dans les équations de ces courbes, au moins une des inconnues eût une infinité de dimenſions, ce qui eſt impoſſible.

AVERTISSEMENT.

22. *Avant Mr Deſcartes, on ne prenoit pour Geometrique que ce qui ſe faiſoit par le moyen du cercle, & de la ligne droite, & tout ce qui ſe faiſoit par d'autres courbes étoit reputé mechanique. Mais Mr Deſcartes, & après lui tous les nouveaux Geometres, ont pris pour Geometrique, tout ce qui ſe fait par le moyen des courbes Geometriques. Et les mêmes Auteurs ne prennent pour méchanique, que ce qui ſe fait par le moyen des courbes méchaniques.*

OBSERVATIONS

Pour l'Application de l'Algebre à la Geometrie.

IV. VOICI les Remarques ou Obſervations dont on a parlé dans le premier Article, no. 8.

1. Lorſqu'on veut réſoudre un Problême, il faut toujours employer deux lettres inconnues, pour nommer deux lignes indéterminées, qui ayent leur origine en un point fixe, & qui faſſent toujours un angle conſtant, c'eſt-à-dire, que la ligne nommée par l'une des lettres inconnues, croiſſant ou diminuant; celle qui eſt nommée par l'autre lettre inconnue, demeure toujours parallele à elle-même, ou à quelque ligne donnée. Ainſi, lorſqu'on a nommé (art. 3. no. 9.) *CP*, x; & *PM*, y; l'on a eu égard à cette

Fig. 4. Observation. De même le demi cercle AMB étant donné; s'il étoit question de déterminer le point M sur sa circonference; ayant abaissé la perpendiculaire MP, l'on pourroit nommer indifferemment AP, ou CP, ou BP, x; car les points A, C, & B sont fixes; & PM, y. Et si le Problême est déterminé, on trouvera deux équations indéterminées; mais on n'en trouvera qu'une seule, s'il est indéterminé.

2. Si l'on employe plus de deux inconnues, il faut qu'il y en ait deux qui expriment des lignes, dont la position soit telle qu'on vient de dire dans l'Observation précedente; on placera ensuite les autres, comme on voudra. Mais on peut presque toujours se dispenser d'en employer plus de deux, en exprimant les autres lignes inconnues, dont on a besoin, ou par la proprieté du triangle rectangle, ou par celle des triangles semblables.

Fig. 3. 3. S'il y a un point donné B sur un des côtez AH d'un angle donné GAH; la droite BC perpendiculaire à AH, ou parallele à quelque ligne donnée de position, sera donnée de grandeur & de position; comme aussi les intervalles AB, AC; & partant ces lignes peuvent être nommées par des lettres connues a, b, c. Mais si le point B, est cherché, les lignes AB, BC, AC seront indéterminées, ou variables: & l'on en pourra nommer deux AB & BC, ou AC & BC par deux lettres inconnues x & y: car elles ont les qualitez requises par la premiere Observation.

Fig. 5. 4. S'il y a un point donné D hors d'une ligne AB donnée de position & de grandeur, la ligne DC perpendiculaire à AB, ou parallele à quelque ligne donnée de position, & les deux parties AC, CB, de la ligne AB seront aussi données de grandeur & de position. Mais si le point D est cherché, les lignes DC, AC, & CB seront variables, & l'on pourra nommer une des parties AC, de la donnée AB, x; CD, y; & CB (ayant nommé AB, a) sera $a-x$.

Fig. 6. 7. 5. Un angle GAH, & un point B au-dedans de cet angle

angle (Fig. 6), ou au-dehors (Fig. 7.) étant donnez de position ; les paralleles *BC*, *BD*, ou leurs égales *AC*, *AD*, seront aussi données, & on les pourra nommer *a* & *b* : mais si le point *B* est cherché, les paralleles *AC*, *AD*, seront inconnues, & on les pourra nommer *x*, & *y*.

6. Ce seroit la même chose, si le point *B* étoit donné ou cherché sur une courbe donnée *HBG*, dont *AG*, & *AH* sont les deux axes, ou deux diametres conjuguez : mais le point *B* étant cherché, on pourroit nommer *GC*, & *CB*, ou *HD*, & *DB*, ou (si la courbe rencontroit encore *CG* prolongée en un point *F* (Fig. 8.) *FC*, & *CB*, *x* & *y*. FIG. 8.

7. Lorsqu'on détermine par une operation repetée, plusieurs points *B* sur un plan où il y a des lignes qui servent à déterminer tous ces points, & qu'on veut trouver une équation qui exprime la nature de la courbe sur laquelle les mêmes points se doivent rencontrer, il faut toujours nommer par une lettre inconnue, quelque ligne ; comme *BC*, qui part d'un des points *B*, & qui étant parallele à quelque ligne donnée *AH*, rencontre une autre ligne *AG* donnée de position en quelque point *C*, & nommer par une autre lettre inconnue quelque partie de la ligne *AG* comprise entre le point variable *C*, & quelque point fixe *A*, ou *G*. FIG. 8.

8. Un angle *GAH*, & un point fixe *D* hors de cet angle, étant donnez de position sur un plan ; s'il s'agit de mener une ligne *DEF* par quelque point cherché *E* ou *F* sur un des côtez de cet angle, dans de certaines conditions, les parties *AE*, *AF* seront inconnues, & pourront être nommées *x*, & *y* : mais les paralleles *DB*, *DC*, aux côtez *AH*, *AG*, ou leurs égales *AC*, *AB* seront données, & pourront être nommées *a*, & *b*. FIG. 9.

9. Si l'on est obligé de tirer des lignes autrement que selon les regles contenues dans les Observations précedentes ; on les tirera de maniere qu'elles forment plutôt dans la figure, sur laquelle on opere, des triangles semblables, que des triangles rectangles : car les triangles semblables donnent des équations plus simples que les triangles rectangles.

10. La proprieté du triangle rectangle, & des triangles semblables, donne presque toutes les équations dans lesquelles on tombe, en appliquant l'Algebre à la Geometrie.

11. Les hypothenuses des triangles rectangles doivent toujours être exprimées par le moyen des deux côtez qui forment l'angle droit, à moins qu'elles ne soient données de grandeur. Ainsi les deux côtez étant nommez x & y, l'hypothenuse sera $\sqrt{xx+yy}$.

12. On ne doit jamais nommer les lignes égales, ou qui doivent être égales, par des lettres differentes.

13. S'il y a de la difficulté à employer & à nommer des lignes qui semblent necessaires à la resolution d'un Problême ; on pourra employer en leur place d'autres lignes, pourvû qu'elles ayent entr'elles le même raport.
FIG. 3. Par exemple, en supposant que *BC*, & *DE* soient paralleles, il s'agit d'employer *AB*, & *BD* ; & que *AC*, & *CE* soient nommées ; on pourra employer *AC*, & *CE* au lieu de *AB*, & *BD* ; puisque $AC \,.\, CE :: AB \,.\, BD$.

14. On abrege le calcul, & on trouve souvent des équations plus simples, en prenant pour l'origine des inconnues le point qui divise par le milieu une ligne donnée de grandeur : & l'on tombe par ce moyen dans un principe très-connu, & qui est souvent d'un grand secours dans l'Application de l'Agebre à tous ses usages. Le voici.

15. La moitié de la somme de deux grandeurs, plus la moitié de leur difference est égale à la plus grande ; & la moitié de la somme de deux grandeurs, moins la moitié de leur difference est égale à la plus petite. Ainsi, nommant la somme $2m$, & la difference $2n$; la plus grande sera $m+n$, & la plus petite $m-n$.

16. Il n'est pas necessaire de prendre tant de précautions, pour nommer les lignes de la figure sur laquelle on opere, quand il s'agit de démontrer un Theorême : car comme il n'y a point de lignes dont il soit necessaire de déterminer la longueur, on les peut toutes nommer par telles lettres qu'on voudra, connues, ou inconnues : mais

on doit toujours ſuivre les regles précedentes pour tirer les lignes neceſſaires.

On conſidere neanmoins quelquefois les Theorêmes qu'on veut démontrer, comme des Problêmes à reſoudre. Et en ce cas, on peut ſuivre les principes précedens.

AVERTISSEMENT.

Toutes ces Obſervations peuvent apporter beaucoup de facilité pour trouver des équations dans l'Application de l'Algebre à la Geometrie : mais la premiere & la ſeptième ſont les plus conſiderables de toutes ; car en ſuivant ce qui y eſt preſcrit, les Problèmes indéterminez, ſeront toujours reſolus par la voye la plus ſimple, ou plutôt par la ſeule voye naturelle ; c'eſt pourquoi ſi en ce cas, on avoit employé plus de deux inconnues, il faudroit faire évanouir celles qui expriment des lignes dont la poſition n'eſt point conforme à ce qui eſt dit dans ces deux Obſervations. Mais parcequ'on ne peut pas conſtruire tous les Problèmes déterminez par le moyen de deux équations indéterminées, pour les raiſons que l'on a dites art. 3. *n°.* 17; *on eſt quelquefois obligé d'abandonner ces deux Obſervations. Voici à peu près ce qu'il y a à obſerver, quand on les veut ſuivre.*

17. Quand en reſolvant un Problême avec deux inconnues, ſuivant la premiere Obſervation, on trouvera deux équations indéterminées ; le Problême ſera déterminé, & on le pourra conſtruire avec ces deux équations ; ſi elles ſe rapportent toutes deux à la ligne droite, ou l'une à ligne droite, & l'autre au cercle, ou toutes deux au cercle ; car il n'y a point de lignes plus ſimples que la droite, & la circulaire.

18. Si l'une de ces deux équations indéterminées ſe rapporte au cercle, & que l'autre ſoit du ſecond degré, il faudra faire évanouir l'une des deux inconnues ; & ſi l'équation déterminée qui en réſulte, n'eſt point du premier, ou du ſecond degré, on examinera ſi elle ne peut point être diviſée par quelque binome composé de quelqu'un des diviſeurs du dernier terme, & d'une puiſſance

du premier qui lui ſoit égale, pour la réduire, ſi cela ſe peut, à une équation déterminée du ſecond degré. Si par ce moyen on n'y réuſſit point, il faudra, ſi elle eſt du quatrième degré, faire évanouir le ſecond terme; la transformer en une équation du troiſiême, & voir ſi elle ne peut point enſuite être diviſée par quelque binome, composé d'un des diviſeurs de deux dimenſions du dernier terme, & du quarré de l'inconnue qu'elle renferme, & la réduire par ce moyen à une équation du ſecond degré. Mais ſi l'on ne trouve aucun binome plan, qui puiſſe diviſer l'équation transformée, le Problême ſera ſolide, & on pourra le conſtruire avec les deux équations indéterminées, de la maniere qu'on dira dans la neuviême Section; & la conſtruction ſera même beaucoup plus ſimple, & plus élegante que celle qu'on tireroit de l'équation déterminée, qui réſulte de l'évanouiſſement de l'une des inconnues, comme on pourra voir en comparant les conſtructions des Problêmes ſolides de la neuviême Section, avec celles de la dixiême.

19. Si par la ſeule diviſion l'équation déterminée peut être réduite à une équation du ſecond degré, le Problême ſera plan, & on le conſtruira par le moyen de l'équation réduite à deux dimenſions, comme on enſeignera dans la Section ſuivante.

Si pour réduire l'équation déterminée à une équation du ſecond degré, il faut employer la transformation; on pourroit encore le conſtruire par le moyen de l'une des deux équations du ſecond degré que l'on en tire: mais la conſtruction en ſera beaucoup plus ſimple, ſi en abandonnant ce qui eſt dit dans la premiere Obſervation, on prend d'autres lignes pour inconnues, & que l'on en tire de nouvelles, ſelon qu'on le jugera neceſſaire, & que par ce moyen on puiſſe venir à une équation déterminée du ſecond degré. Et ſi on n'y réuſſit pas du premier coup, il faudra encore tenter d'autres voyes; car quand un Problême eſt ſimple, on peut trouver une équation ſimple, & conforme à ſa nature, ſoit d'une maniere, ſoit d'une autre.

20. Si aucune des deux équations indéterminées ne ſe rapporte au cercle, & n'y peut être réduite par la combinaiſon de l'une avec l'autre, ou autrement ; & que l'équation qui réſulte de l'évanouiſſement de l'une des inconnues, ſoit du troiſiême ou du quatriême degré, & ne puiſſe être réduite par la diviſion, ou par la transformation à une équation du ſecond degré ; il faudra par ſon moyen conſtruire le Problême, comme il ſera enſeigné dans la dixiême Section : car il ſera neceſſairement ſolide ; & quand on chercheroit d'autres équations par d'autres voyes, elles ne pourroient être plus ſimples que par leurs termes, un Problême ne pouvant jamais changer de nature.

21. Enfin ſi l'équation qui réſulte de l'évanouiſſement de l'une des deux lettres inconnues renfermées dans les deux équations indéterminées, excede le quatriême degré, & n'y peut être réduite par la diviſion ; le Problême ſera lineaire, & on le conſtruira par le moyen des deux équations indéterminées, comme on le dira dans la douziême Section.

22. La raiſon de tout ceci, eſt que pour conſtruire les Problêmes ſimples, & plans, on ne doit employer que la ligne droite & le cercle ; puiſqu'on le peut toujours. Et ſi on les conſtruiſoit par le moyen des deux équations indéterminées que l'on trouve en employant deux lettres inconnues, on y employeroit ſouvent d'autres courbes, qui ne ſont pas ſi ſimples que le cercle.

Pour conſtruire les Problêmes ſolides dont les équations ſont du troiſiême ou quatriême degré, on ne doit employer que le cercle, & une courbe du premier genre, puiſque cela ſe peut auſſi toujours.

Mais parceque pour conſtruire les Problêmes lineaires, dont les équations excedent le quatriême degré, l'on ne peut faire ſervir le cercle ; leur conſtruction ſera plus ſimple par le moyen des deux équations que l'on trouve en employant deux inconnues, ſelon la premiere Obſervation, que de toute autre maniere : car, à mon avis, c'eſt en quelque façon gêner la Geometrie que d'y introduire,

ſouvent avec beaucoup de difficulté, de certaines courbes préferablement à d'autres qui ſe preſentent naturellement, & dont la deſcription eſt ſouvent très-ſimple : en quoi je voudrois que les courbes fuſſent préferées, ſans avoir égard à leur genre, de la maniere qu'on le détermine ordinairement.

AVERTISSEMENT.

Lorſqu'on ſçait qu'un Problême eſt ſimple, ou plan, il n'eſt point neceſſaire d'avoir égard à la premiere Obſervation, ni d'employer deux lettres inconnues pour le reſoudre. Il y a auſſi des Problêmes ſi ſimples, qu'il n'y a aucune difficulté, ni pour nommer les lignes, ni pour trouver des équations.

Tout ce qu'on a dit dans cette premiere Section ſera éclairci par toute la ſuite de cet Ouvrage, qui n'en eſt que l'Application, & un Commentaire.

SECTION II.

Où l'on donne la maniere d'exprimer Geometriquement les quantitez Algebriques, & de reſoudre les Problêmes ſimples, & plans; ou ce qui eſt la même choſe, de conſtruire les équations déterminées du premier & du ſecond degré.

V. ON peut exprimer Geometriquement toutes les quantitez Algebriques, par le moyen des quatre operations ſuivantes, qui ſont de trouver des troiſiêmes, quatriêmes & moyennes proportionnelles, & de tirer les racines de la ſomme, ou de la difference de deux ou de pluſieurs quarrez.

1. Pour exprimer Geometriquement $\frac{ab}{c}$; ayant mené

FIG. 3. une ligne droite AH; dont l'extrêmité A ſoit fixe, fait $AB=c$, $AD=a$, mené $BC=b$, qui faſſe avec AB un

angle quelconque *ABC*, s'il n'eſt pas déterminé d'ailleurs, & mené *ACG*; la ligne *DE* parallele à *BC* ſera $\frac{ab}{c}$: car à cauſe des paralleles *BC*, *DE*, l'on aura *AB* (c). *AD* (a) :: *BC* (b). $DE = \frac{ab}{c}$. Ce ſeroit la même choſe s'il faloit exprimer Geometriquement $\frac{aa}{c}$: car il n'y auroit qu'à faire $BC = AD = a$, après avoir fait $AB = c$; où l'on remarquera que toute quantité fractionnaire peut être regardée comme le quatriême terme d'une proportion, qui renferme les trois autres, & dont le dénominateur eſt le premier.

De même pour exprimer Geometriquement $\frac{aa + ab}{c + d}$; en réduiſant en proportion l'on a $c + d . a + b :: a . \frac{aa + ab}{c + d}$. Faiſant donc $AB = c + d$, $AD = a + b$, $BC = a$; *DE* parallele à *BC*, ſera $= \frac{aa + ab}{c + d}$. Ce ſera la même choſe ſi l'on veut exprimer Geometriquement $\frac{aa - bb}{c}$: car en réduiſant en proportion l'on a . $c . a + b :: a - b . \frac{aa - bb}{c}$. Semblablement, pour exprimer Geometriquement $\frac{aab}{cd}$ qui contient deux proportions, $c . a :: a . \frac{aa}{c}$, & $d . b :: \frac{aa}{c} . \frac{aab}{cd}$, l'on exprimera d'abord $\frac{aa}{c}$, comme on vient de voir pour les quantitez précedentes, & enſuite $\frac{aab}{cd}$. Il en eſt ainſi des autres quantitez fractionnaires.

2. Pour exprimer Geometriquement $\sqrt{ab}$. Il faut pren-

FIG. 10. dre sur une ligne droite AH, $AD = a$, & $DB = b$, & ayant décrit un demi cercle sur le diametre AB; la ligne DE perpendiculaire au point D, sera égale à $\sqrt{ab}$: car nommant DE, x; l'on aura $a (AD) . x (DE) :: x (DE) . b (DB)$; donc $xx = ab$, & $x = \sqrt{ab}$. De même pour exprimer $\sqrt{aa + ab}$, on voit que $aa + ab$, est la produite de $a + b$; par a. Ainsi ayant fait $AD = a + b$, & $DB = a$; DE, sera $\sqrt{aa + ab}$.

Semblablement, pour exprimer $\sqrt{aa - bb}$; puisque $aa - bb$, est le produit de $a + b$ par $a - b$, en faisant $AD = a + b$, & $DB = a - b$; DE sera $= \sqrt{aa - bb}$. On peut encore exprimer autrement cette quantité, comme on va voir n°. 3.

Pour exprimer $\frac{m}{n} \sqrt{aa - bb}$; ayant trouvé, comme on vient de faire $DE = \sqrt{aa - bb}$, & l'ayant nommée; c, l'on aura $\frac{mc}{n}$ au lieu de $\frac{m}{n} \sqrt{aa - bb}$, & l'on trouvera (n°. 1.)

FIG. 3. $DE = \frac{mc}{n}$, faisant $AB = n$, $BC = m$, & $AD = c$.

3. Pour exprimer Geometriquement $\sqrt{aa + bb}$. Puisque $aa + bb$ est la somme de deux quarrez, il est clair que
FIG. 11. si l'on décrit un triangle ABC rectangle en B, un de ses côtez AB étant nommé a, & l'autre BC, b; l'hypothenuse AC sera $= \sqrt{aa + bb}$. Il ne seroit pas plus difficile d'exprimer la racine de la somme de plusieurs quarrez, comme $\sqrt{aa + bb + cc}$, &c.

Pour exprimer Geometriquement $\sqrt{aa - bb}$, qui est la difference de deux quarrez; il est évident qu'ayant décrit un triangle rectangle dont l'hypothenuse soit $= a$ racine du quarré positif, & un des côtez $= b$ racine du quarré negatif, l'autre côté sera $= \sqrt{aa - bb}$. Ce qui se fait en
FIG. 12. cette sorte; soit décrit sur le diametre $AB = a$, le demi cercle ACB, & soit inscrit dans le demi cercle de la ligne $AC = b$, & mené CB; l'angle ACB, étant droit à cause

cauſe du demi cercle; CB ſera $= \sqrt{aa - bb}$. La même choſe s'execute encore en la maniere ſuivante. Soit décrit un demi cercle ſur le diametre $AB = 2a$, élevée au centre C la perpendiculaire CH, priſe $CG = b$ racine du quarré negatif, menées EF, & FD paralleles à AB, & à HC, & mené le rayon CF; GF ou CD ſera $= \sqrt{aa - bb}$; puiſque $CF = a$, & CG, ou $DF = b$. Cette derniere maniere convient mieux à la conſtruction des équations que la précedente. Fig. 13.

4. Il y a des quantitez Algebriques plus compoſées que celles dont on vient de parler (nº. 1, 2, 3;) & que l'on ne peut exprimer geometriquement, qu'après y avoir fait certains changemens. Or ces changemens conſiſtent particulierement à mettre l'expreſſion Algebrique d'un quarré en la place de l'expreſſion Algebrique d'un rectangle, ou de mettre l'expreſſion Algebrique d'un rectangle dont un côté ſoit donné en la place d'un autre rectangle, ou d'un quarré. Ainſi pour exprimer geometriquement cette quantité fractionnaire $\frac{aa + bb - cd}{b}$, dont le numerateur n'eſt point le produit de deux quantitez que l'on puiſſe ſéparer par la diviſion, & qui ne peut par conſequent être réduite en analogie; il faut donc changer le quarré Algebrique bb, en un rectangle dont un côté ſoit a, & le rectangle Algebrique cd, en un autre rectangle Algebrique, dont un côté ſoit auſſi a, afin que la lettre a ſe trouve dans tous les termes. Soit pour ce ſujet x, le côté du rectangle qui doit être égal à bb, dont l'autre côté eſt la ligne donnée, exprimée par a; l'on aura, ſelon les termes de la queſtion, $ax = bb$; donc $x = \frac{bb}{a}$; ayant donc (nº. 1.) exprimé geometriquement $\frac{bb}{a}$; & l'ayant nommée f; l'on aura $f = x$; & partant $af = bb$. Soit ſemblablement y le côté du rectangle qui doit être égal à cd, dont l'autre côté eſt la même donnée a; l'on

E

aura $ay = cd$; donc $y = \frac{cd}{a}$: & ayant nommé g l'expreſſion de $\frac{cd}{a}$ trouvée (nº. 1.); l'on aura $ag = cd$; la quantité precedente ſera donc changée en celle-ci, $\frac{aa + af - ag}{b}$, en mettant pour bb, & pour cd, leurs valeurs af, & ag que l'on vient de trouver, qui eſt facile à exprimer; puiſqu'on la peut à preſent réduire en l'analogie ſuivante $b. a :: a + f - g. \frac{aa + af - ag}{b}$. On auroit pû changer le quarré aa, & le rectangle cd, au lieu que l'on a changé bb, & cd.

5. Pour exprimer la quantité $\sqrt{aa - bc}$, il faut changer le quarré aa en un rectangle, dont un côté ſoit b ou c; ou bien le rectangle bc en un autre, dont un côté ſoit a; & on en aura enſuite facilement l'expreſſion geometrique (nº. 2.) Il en eſt ainſi des autres.

6. Les manieres dont nous venons de nous ſervir pour exprimer geometriquement les quantitez Algebriques ſont generales: on les peut ſouvent abreger par le moyen de quelques lignes menées paralleles à quelques autres lignes données de poſition, ou en décrivant quelques cercles, ſelon que l'indique la figure de chaque Problême que l'on conſtruit: mais comme ces manieres ſont particulieres, on n'en peut rien dire ici, cela dépend du genie du Geometre, qui veut réſoudre & conſtruire les Problêmes le plus élegamment qu'il lui eſt poſſible. On les trouvera pratiquées dans pluſieurs exemples.



CONSTRUCTION

Des Equations déterminées du premier degré, & de celles du ſecond qui n'ont point de ſecond terme.

7. ON voit clairement que les expreſſions geometriques des quantitez Algebriques, donnent auſſi la réſolution des équations du premier degré, & de celles du ſecond, qui n'ont point de ſecond terme; car ſi ces mêmes quantitez étoient égalées à des lettres inconnues leur valeur ſeroit déterminée par ces expreſſions. Par exemple, pour conſtruire cette équation $xx = aa - bc$, d'où l'on tire $x = \pm\sqrt{aa - bc}$, il n'y a qu'à exprimer $\sqrt{aa - bc}$, comme on vient de faire; & l'expreſſion priſe de part & d'autre, de l'origine de x ſera ſa valeur poſitive & negative. Il en eſt ainſi des autres.

CONSTRUCTION

Des Equations du ſecond degré, qui ont un ſecond terme.

VI. LES Equations du ſecond degré qui ont un ſecond terme, ſe peuvent toutes réduire à quelqu'une des quatre formules ſuivantes.

1. $xx = ax + bb$.
2. $xx = -ax + bb$.
3. $xx = ax - bb$.
4. $xx = -ax - bb$, dont les racines ſont,

1. $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.
2. $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.
3. $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.
4. $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

CONSTRUCTION

De la premiere & seconde Formule.

1. POUR la premiere & la ſeconde Formule. Soit dans la figure ſur laquelle on opere, & d'où l'on a tiré l'équation que l'on veut conſtruire, *A* le commencement de *x* qui va vers *H*. Ayant élevé au point *A* la ligne *AB* perpendiculaire à *AH*, & $= b$ racine du dernier quarré *bb*; on prendra *AC* (Fig. 14.) $= \frac{1}{2} a$ du côté de *H*, par raport à *A* pour la premiere formule où il y a $+ \frac{1}{2} a$; & de l'autre côté de *H* (Fig. 15.) pour la ſeconde formule, où il y a $- \frac{1}{2} a$; & du centre *C* l'on décrira par *B*, le cercle *DBE*, qui coupera *AH* en *E*, & en *D*. Je dis que *AE* ſera la valeur poſitive de *x*, & *AD* ſa valeur negative.

Fig. 14. & 15.

DE'MONSTRATION.

PUISQUE $AC = \frac{1}{2} a$, & $AB = b$; $CB = CE$ ſera $= \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; & par conſequent $x = AE = \pm \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. *C. Q. F. D.*

On prouvera de même que *AD*, eſt la valeur negative de *x* qui doit être priſe de l'autre côté de *A* par raport à *H*.

CONSTRUCTION

De la troiſiême & quatriême Formule.

Fig. 13. & 16. 2. SOIT *A* le commencement de *x* qui va vers *P*. Ayant pris *AC* du côté de *P*, par raport à *A* pour la troiſiême formule, où il y a $+ \frac{1}{2} a$ (Fig. 13.); & de l'autre côté de *P* ſur le prolongement de *AP* pour la qua-

triême formule, où il y a $-\frac{1}{2}a$ (Fig. 16.); l'on décrira du centre C & du demi diametre $CA = \frac{1}{2}a$ le demi cercle AHB, on élevera ensuite CH perpendiculaire à AB, sur laquelle ayant pris $CG = b$, racine du dernier quarré, on menera EF parallele à AB, qui coupera le demi cercle aux points E & F, d'où l'on abaissera les perpendiculaires FD, EI. Je dis que AD & AI, seront les deux valeurs positives de x (Fig. 13), pour la troisiême Formule; negatives (Fig. 16), pour la quatriême.

DEMONSTRATION.

PUISQUE AC ou $CF = \frac{1}{2}a$, & $CG = b$; GF, ou CD sera $= \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & par consequent $AD = x = \pm\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $AI = x = \pm\frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, lesquelles valeurs sont toutes deux réelles & positives dans la Fig. 13. qui appartient à la troisiême formule, & toutes deux réelles, mais negatives dans la Fig. 16. qui appartient à la quatriême formule. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

3. SI $b = CG$ est $= \frac{1}{2}a = CH$, le point G tombera en H, les points D & I en C, & les deux valeurs de x, seront égales.

4. Si CG est plus grande que CH; les deux mêmes valeurs de x seront imaginaires, & le Problême sera impossible. Ce qui se connoît aussi par l'inspection des deux formules que l'on construit.

5. On peut encore construire ces équations, en faisant évanouir le second terme, après quoi on trouvera les valeurs de l'inconnue par l'art. 5. n°. 2.

6. Il y a encore d'autres équations qui appartiennent au ſecond degré : comme $x^4 = \pm aa\,xx \pm a^3 b$, mais on les ramene à quelqu'une des quatre formules précedentes en égalant le quarré xx de l'inconnue à un rectangle, dont un côté eſt une autre inconnue ; & l'autre côté eſt une lettre connue de l'équation. On prend ordinairement celle qui s'y trouve le plus fréquemment. Ainſi, en faiſant $ay = xx$, & mettant dans l'équation $aayy$, pour x^4, & ay pour xx, l'on aura $yy = \pm ay \pm ab$, qui étant conſtruite par les regles précedentes ; la moyenne proportionnelle entre a & y, ſera la valeur de x.

Par le moyen des équations du premier, & du ſecond degré, l'on fait tout ce que les Anciens prenoient pour Geometrique.

EXEMPLES.

VII. NOUS allons réſoudre pluſieurs Problêmes du premier & du ſecond degré, pour ſervir d'exemples à la conſtruction des équations plus compoſées que les précedentes.

PROBLÊME SIMPLE.

FIG. 17. I. *DECRIRE un quarré* GFHI *dans un triangle donné* ABC.

Je remarque 1°. Que le triangle *ABC* étant donné, la perpendiculaire *AD* le ſera auſſi. 2°. Que pour former le quarré, il ſuffit de trouver dans la perpendiculaire *AD*, un point *E*, tel que *DE* ſoit égale à *FG* menée par le point *E* parallele à *BC* : car alors ayant mené *FH*, & *GI* paralleles à *AD* ; *FHIG* ſera un quarré.

Ayant donc ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé les données *BC*, a ; *AD*, b ; & l'inconnue *DE*, ou *FG*, x ; *AE* ſera $b - x$. Les triangles ſemblables *ABC*, *AFG* donneront $b\,(AD) . a\,(BC) :: b - x\,(AE) . x\,(FG)$; donc $bx = ab - ax$ ou $ax + bx = ab$, d'où l'on tire $x = \frac{ab}{a+b}$, qui donne cette conſtruction.

On prendra sur *DB* prolongée du côté de *B* l'intervalle $DK = BC$, & $KL = AD$, & ayant joint *LA*, on menera *KE* parallele à *LA*, qui coupera *AD* au point cherché *E*.

DE'MONSTRATION.

A Cause des paralleles *LA*, *KE* l'on a *LK* ou (conſt.) $AD . AE :: KD$ ou (conſt.) $BC . DE$: mais $AD . AE :: BC . FG$; donc $BC . DE :: BC . FG$; & par conſequent $DE = FG$; & partant *FHIG*, eſt un quarré *C. Q. F. D.*

PROBLÊME SIMPLE.

2. U*N demi cercle*, ABC, *dont le centre eſt* D, *avec une* FIG. 18.
perpendiculaire FB *à ſon diametre* AC, *qui le diviſe en deux parties quelconques*, AF, FC, *& un autre demi cercle* FSC, *décrit ſur le diametre* FC, *étant donnez; il faut trouver dans le triligne mixte* BFSCB, *le centre* O *d'un cercle, dont la circonference touche les trois côtez du triligne mixte, comme on voit dans la Figure.*

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, mené (art. 4. nº. 1.) les lignes *OI*, *OE* paralleles à *FC* & à *FB*, & les lignes *OK*, *OS* aux points touchans *K*, *S*; qui étant prolongées, iront paſſer aux centres *D*, & *G* des cercles *ABC*, *FSC*, comme il eſt démontré dans les élemens de Geometrie.

Nommant donc les données *AD*, ou *DC*, ou *DK*, a; *FG*, ou *GC*, ou *GS*, b; *DF*, c; *FB*, f; & les inconnues *FE*, ou *IO*, ou *OK*, ou *OS*, x; *FI*, ou *EO*, y; *DO* ſera $a - x$; *GO*, $b + x$; *GE*, $b - x$; & *DE*, $c + x$. Les triangles rectangles *OED*, *OEG* donneront $DO^2 - DE^2 = EO^2$, ou en termes Algebriques $aa - 2ax + xx - cc - 2cx - xx = yy = GO^2 - GE^2 = bb + 2bx + xx - bb + 2bx - xx$, ou en retranchant ce qui doit être retranché, $aa - cc - 2ax - 2cx = 4bx$, d'où l'on tire $x = \frac{aa - cc}{4b + 2a + 2c}$, où je remarque que $aa - cc = a + c \times a - c = AF \times FC = FB^2 = ff$, & que $4b + 2c = AC = 2a$; & partant $x = \frac{ff}{4a}$ d'où l'on tire cette conſtruction.

Soit prolongée la perpendiculaire BF en M, en sorte que $FM = 2\,ac = 4\,a$; du centre F par B soit décrit le demi cercle BQP, qui rencontrera FM en P, & DC prolongée, s'il est necessaire, en Q. Et ayant joint QM, soit menée par P la droite PE parallele à QM, qui rencontrera FC en E; ayant ensuite mené EO, parallele à FB, & décrit du centre D, & du demi diametre $DL = DC - FE$ le cercle LOH; il coupera EO au point cherché O, qui sera le centre du cercle ISK, qui satisfait au Problême.

DEMONSTRATION.

SOIT du centre G, & du demi diametre $Gf = GF + FE$ décrit le cercle fOr. A cause des triangles semblables, MFQ, PFE; FM, ou (const.) $2AC$. FQ :: PF, ou FQ. FE; donc $2AC \times FE = FQ^2 = FB^2 = AF \times FC$; donc $2AC \times FE = AF \times FC$. Et partant $2AC$. AF :: FC. FE. *dividendo* $2AC - AF$. AF :: FL. FE. Or $2AC - AF = AC + FC$. Car $2AC = AC + AF + FC$; donc $2AC - AF = AC + FC$. AF, ou HE : car $AH = OK = IO = FE$. Or $HF = HF$; donc ajoutant d'une part AH, & de l'autre FE, on a $AH + HF$ (AF) $= HF + EL$ ($= HE$) :: $FL = FC - FE$. car $FC - LC = FL$. or $FE = IO = OK = LC$, puisque le rayon DO du demi cercle HOL est plus court de $OK = LC$ que le rayon DK du demi cercle AKC; donc $FL = FC - FE$. Encore *dividendo* $AC + FC - HE$ ($2FC$). HE :: EL. FE. il faut montrer que $AC + FC - HE = 2FC$. car 1°. $HE = AF$. 2°. $AC - AF = FC$; donc $AC + FC + HE = 2FC$. HE :: EL. FE, ou Cr; $FE = Cr$. car $FE = IO = OS = Cr$; donc $HE \times EL = 2FC \times Cr = FC \times 2Cr = fE \times Er$; Et partant $HE \times EL = fE \times Er$: mais $HE \times EL = EO^2$; donc aussi $fE \times Er = EO^2$; c'est pourquoi le point O est commun aux deux cercles HOL, fOr, & à la perpendiculaire EO : mais par la construction les lignes OK, OI, OS sont égales; & les points K, S, I, sont les points touchans;

chans ; puisque les lignes *OS*, & *KO*, vont aux centres *G* & *D* des cercles *ABC*, *FSC*, & que *OI*, est perpendiculaire à *FB* ; donc le point *O*, est le centre du cercle *ISK*, qui satisfait au Problême. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME PLAN.

3. UN *demi cercle* AEB, *dont le centre est* C, *& une perpendiculaire* DE *à son diametre étant donnez ; il faut trouver sur* DE *le point* F, *par où, & par le point* A, *ayant mené la ligne* AFG ; GF *soit égale au demi diametre* AC. FIG. 19.

Ayant supposé le Problême résolu, & nommé les données *AC*, ou *CB*, ou *FG*, *a* ; *AD*, *b* ; *DE*, *c* ; & l'inconnue *AF*, *x* ; *DF* sera $\sqrt{xx - bb}$; l'on a par la proprieté du cercle $DE^2 - DF^2 = AF \times FG$, car $DE + DF . AF :: FG . FE$. or $FE = DE - DF$; donc $DE + DF . AF :: FG . DE - DF$; donc en multipliant les extrêmes, le produit sera égal au produit des moyens, c'est-à-dire, que $\overline{DE}^2 - \overline{DF}^2 = AF \times FG$, ou $cc - xx + bb = ax$, ou $xx = -ax + cc + bb$; d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + cc + bb}$, qui fournit cette construction.

Soient menées du point *E* aux extrêmitez *A* & *B* du diametre *AB*, les droites *EA*, *EB*. Et ayant fait $EL = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$, soit décrit du centre *A* par *L*, l'arc *LH* qui coupera *AB* en *H*. Et du centre *H*, & du demi diametre *EL*, soit décrit un cercle qui coupera *AB* aux points *I* & *K*. Je dis que *AI*, sera la valeur positive de *x* ; c'est pourquoi si du centre *A* l'on décrit les deux arcs *KG*, *IF* qui couperont la circonference *AEB* en *G*, & *DE* en *F* ; la droite *AF* étant prolongée rencontrera la circonference *AEB* en *G*, & *FG* sera par consequent $= AC$; puisqu'elle est égale à *IK* double de $EL = \frac{1}{2}AC$.

DEMONSTRATION.

PAR la construction, & à cause des triangles rectangles *AEL*, *ADE* ; $AL^2 - EL^2 = AH^2 - IH^2 = AK \times AI$,

car $\overline{AH}^2 - \overline{IH}^2 = \overline{AH+IH} \times \overline{AH-IK}$; mais $IH = HK$; donc $AH+IH = AH+HK = AK$. or $AH - IH = AI$; donc $\overline{AH}^2 - \overline{IH}^2 = AK \times AI = AG \times AF$, il faut montrer que $AG \times AF = \overline{AE}^2$... si vous supposez la ligne BG, les triangles AFD, AGB seront semblables, puisque l'angle FAD leur est commun, & qu'ils ont chacun un angle droit en D & en G; donc $AF . AD :: AB . AG$; donc $AF \times AG = AD \times AB$. Mais $AD \times AB = \overline{AE}^2$; donc $AF \times AG = \overline{AE}^2 = AD^2 + DE^2 = AB \times AD = AD \times DB + AD^2$, $AB \times AD = AD \times DB + \overline{AD}^2$, car $AB = AD + DB$; donc en multipliant chaque membre par AD, on aura $AB \times AD = \overline{AD}^2 + AD \times DB$; donc $AG \times AF$, ou $AF \times FG + AF^2$, $AG \times AF = AF \times FG + \overline{AF}^2$; car $AG = AF + FG$; donc $AG \times AF = \overline{AF}^2 + AF \times FG$, ou $AF \times FG + AD^2 + DF^2 = AD \times DB + AD^2$; $AG \times FG + \overline{AD}^2 + \overline{DF}^2 = AD \times DB + \overline{AD}^2$; car 1°. par le raisonnement ci-dessus $\overline{AF}^2 = AG \times FG + \overline{AD}^2 + \overline{DF}^2$. 2°. $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2$; mais $\overline{DE}^2 = AD \times BD$; donc $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + AD \times BD$; donc $AG \times FG + \overline{AD}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{AD}^2 + AD \times DB$; donc, en retranchant AD^2 de part & d'autre, $AF \times FG + DF^2 = AD \times DB = DE^2$; donc $AF \times FG = DE^2 - DF^2$; d'où il suit que la ligne AF prolongée, rencontre le demi cercle AEB au point G où l'arc KG le coupe *C. Q. F. D.*

PROBLÊME PLAN.

FIG. 20. 4. UN *demi cercle* BEC *dont le centre est* D, *& un point* A *hors du demi cercle, étant donnez de position sur un plan; il faut trouver le point* E, *ou* F *sur sa circonference, par où,*

& par le point A, *ayant mené la ligne* AFE, *sa partie* FE, *soit égale au demi diametre* BD.

Ayant supposé le Problême résolu, & nommé les données AC, a; AB, b; BD, ou FE, c; AE sera $x+c$; la proprieté du cercle donnera $a(AC) . x+c(AE) :: x(AF) . b(AB)$; donc $xx+cx=ab$, ou $xx=-cx+ab$, d'où l'on tire $x=-\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc+ab}$ qui donne cette construction.

Ayant mené du point A la tangente AI, & du point touchant I le rayon ID, l'on prendra $IK=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}c$; du centre A par K, l'on décrira l'arc KL qui coupera AC en L; & du centre L, & du rayon IK, l'on décrira un cercle qui coupera AC en O & M. Enfin du centre A par les points O & M, l'on décrira les arcs OF, ME, qui couperont le cercle BEC aux points F, E; de sorte que la ligne AF prolongée, ira au point E; & FE sera par consequent $=BD$; puisqu'elle est égale à $OM=2IK=BD$.

DEMONSTRATION.

A Cause du triangle AIK, rectangle en I; $AK^2 - IK^2 = AL^2 - OL^2$; car $AK=AL$ par construction, & $OL=IK$ aussi par construction; donc $\overline{AK}^2 - \overline{IK}^2 = \overline{AL}^2 - \overline{OL}^2 = AM \times AO$; car $\overline{AL}^2 - \overline{OL}^2 = \overline{AL+OL} \times AL-OL$. or $OL=LM$. donc $AL+OL = AM$, & $AL-OL=AO$. donc $\overline{AL+OL} \times \overline{AL-OL} = AM \times AO = \overline{AL}^2 - \overline{OL}^2 = AE \times AF = AI^2$: mais $AC \times AB = AI^2$; donc $AE \times AF = AC \times AB$; d'où il suit que le point E est commun au cercle BEC, à l'arc ME, & à la droite AFE. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME PLAN.

FIG. 21. 5. *UN triangle* ABC, *& un point* D *hors du triangle étant donnez, il faut mener du point* D *une ligne* DEF, *en sorte que le triangle* ABC, *soit au triangle* EBF, *en la raison donnée de* m *à* n.

Ayant supposé le Problême résolu; puisque le point D est donné de position, les lignes DG parallele à AB, & GB qui est le prolongement du côté BC, seront (art. 4. n°. 5.) aussi données; nommant donc les données AB, a; BC, b; DG, g; GB, f; & les inconnues EB (art. 4. n°. 8.) x; & BF, y; GF sera $f+y$, & l'on aura par les qualitez du Problême $AB \times BC . EB \times BF :: m . n$: car il est facile de démontrer que $AB \times BC . EB \times BF :: ABC . EBF$; donc en termes analytiques, $ab . xy :: m . n$; donc $nab = mxy$. Et les triangles semblables DGF, EBF donnent, g. (DG). $f+y$ (GF) :: x (EB). y (BF); donc $gy = fx + xy$; & faisant évanouir y, l'on aura $mfxx = -nabx + nabg$, ou $xx = -\frac{nabx+nabg}{mf}$. Pour réduire cette équation à la seconde Formule de l'article 6, & pour la construire, soit fait $m . n :: a$ (AB). $\frac{na}{m}$ qui soit BI que je nomme c; mettant donc c dans l'équation en la place de $\frac{na}{m}$, elle se changera en celle-ci $xx = -\frac{cbx+cbg}{f}$. Ayant mené CL parallele à AB, IK parallele à BC, & GIL qui rencontrera CL en L; l'on aura, à cause des triangles semblables GBI, IKL, GB (f). BI (c) :: IK (b). $KL = \frac{bc}{f}$ qui étant nommée d, & mettant d en la place de $\frac{bc}{f}$ dans la derniere équation, elle deviendra celle-ci $xx = -dx + dg$, d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd + dg}$.

FIG. 22. Pour construire le Problême, suivant cette formule, il faut joindre KL (d) & GD (g) sur une même ligne comme vous le voyez dans la Figure 22e. Puis sur $LD = LK + GD$ ($d+g$) décrire le demi cercle LPD, la perpendiculaire GP sera égale à $\sqrt{dg}$. Ensuite du centre C moitié de KL ($\frac{1}{2}d$) & de l'intervalle CP, décrire un autre demi cercle RPH; alors CP

$= \sqrt{\frac{1}{4}dd + dg}$, & $GH = -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd + gg} = x$. Ce qui montre que pour avoir la valeur de $x = BE$, il faut diviser DG en H; en sorte que $DH . HG :: HG . KL$. Il faut montrer à present que $\div DH . HG . KL$. par la construction, $\div KL . PG . DG$, & $\div RG (\overline{KL + GH})$ $PG . GH$. donc $KL \times DG = GH \times \overline{KL + GH}$. donc $DG . GH :: KL + GH . KL$. donc *dividendo* $DG - GH$ $(DH) . GH :: KL + GH - KL (GH) . KL$; c'est-à-dire que $\div DH . GH . KL$. car de cette équation $xx = -dx + dg = dg - dx$, on tire cette analogie $\div g - x . x . d$. or $x = BE = GH$, $g = DG$ & $d = KL$. donc $\div DH$ $(g - x) . HG (x) . KL (d)$. Il faut mener HE parallele à GB qui coupera AB au point cherché E; de sorte que la ligne DEF menée de D par E, résout le Problême.

DEMONSTRATION.

PAR la construction $DH . HG$, ou $EB :: EB . KL$, & les triangles semblables DHE, EBF donnent $DH . EB :: HE$, ou $GB . BF$; donc $EB . KL :: GB . BF$; & partant $EB \times BF = GB \times KL$: mais les triangles semblables GBI, IKL, donnent $GB . BI :: IK$, ou $BC . KL$; donc $BI \times BC = GB \times KL$; donc $EB \times BF = BI \times BC$. Mais $AB \times BC . EB \times BF$, ou $IB \times BC :: AB . IB ::$ (const.) $m . n$, comme le triangle ABC, au triangle EBF. C. Q. F. D.

6. Si l'on veut que le point donné D, soit dans le triangle, il n'y a qu'à changer le signe où f se rencontre; parcequ'alors GB, deviendra negative de positive qu'elle étoit, c'est-à-dire que le point G tombera entre B & C; & l'on aura $xx = -\frac{nabx + nabg}{-mf}$ ou $xx = \frac{nabx - nabg}{mf}$ qui servira à construire le Problême en cette sorte. Alors $x = \frac{1}{2}d \mp \sqrt{\frac{1}{4}dd - dg}$. on joindra $CL (d)$ & $DG (g)$ sur une même ligne; on décrira le demi cercle CPG, la perpendiculaire PD sera $\sqrt{dg}$, puis du centre K milieu de $CD (d)$ on décrira le demi cercle CQD; par le point P FIG. 23.

on menera PQ parallele à CG: du point Q, où PQ coupe le demi cercle CQD on abaiſſera la perpendiculaire QH, & l'on menera $KQ = KC$, alors $K = \sqrt{\frac{1}{4}dd - dg}$, & $CH = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - dg}$. & $HD = \frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - dg} = x$.

FIG. 24. Autre conſtruction. Soient joints CL, DG, dans une même ligne, ſur laquelle on décrira le demi cercle CPG & l'on aura $DP = \sqrt{dg}$; on tranſportera CL en CG, en ſorte que $CL = CG$: du point K milieu de CG on décrira le demi cercle CQG; puis ayant mené PQ parallele à CG, du point Q on abaiſſera la perpendiculaire QH qui ſera égale à $DP = \sqrt{dg}$: ainſi $KH = \sqrt{\frac{1}{4}dd - dg}$; alors $HD = \frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - dg} = x$, & $CH = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd - dg}$. Cette conſtruction eſt plus conforme à la figure 22e: car nous allons montrer que $\div DH. HG. CL$. car $\div CL. DP. DG$. & $\div CH. HQ. (DP). HG$. donc $CL \times DG = CH \times HG$. donc $HG. DC :: CL. CH$. or par conſtruction $CL = 2KH + 2HG$ & $CH = 2KH + HG$, donc $HG. DG :: 2KH + 2HG. 2KH + HG$. donc *dividendo* $HG - DG\ (DH). DG :: 2KH + 2HG - 2KH + HG\ (HG).\ 2KH + HG$. c'eſt-à-dire, $DH. DG :: HG. 2KH + HG$. donc *addendo* $DH. DH + DG\ (HG) :: HG. 2KH + 2HG\ (CL)$. c'eſt-à-dire, que $\div DH. HG. CL$.

$$\left\{ \begin{array}{l} CG = d.\ HG = x.\ QH = DP = \sqrt{dg}. \div CG - HG\ (d - x).\ QH\ (\sqrt{dg}). \\ HG\ (x).\ \text{donc}\ dx - x^2 = dg.\ \text{ou}\ xx = dx - dg. \end{array} \right.$$

Soit diviſée AB en I, en ſorte que $AB. BI :: m. n$. Et ayant pris ſur GD, $GO = BI$, on menera par les points B, & O la droite indéfinie BOL, & par C la ligne CL parallele à AB, qui rencontrera BOL en L. Soit enſuite prolongée GD en H; en ſorte que $DH. HG :: HG. CL$, & menée HE parallele à BC, qui coupera AB en E. Je dis que la ligne EDF menée par les points E & D, réſout le Problême. Car l'équation réduite eſt $xx = dx - dg$, d'où l'on tire cette analogie $\div x - g.\ x.\ d$. or $x = EB = HG$. $g = DG$. $d = CL$. donc $\div DH\ (g - x).\ HG\ (x).\ CL\ (d)$.

Si avec cette équation $xx = - dx + dg$, on veut trouver x, il faut la changer en celle-ci $xx + dx = dg$, d'où l'on a cette analogie $::$ $x + d.$ $\sqrt{dg}.$ $x.$ après avoir trouvé $GP = \sqrt{dg}.$ on prendra $LH = d.$ du point C milieu de LK, & de l'intervalle CP on décrira RPH, alors $::$ RL (GH) $+$ LK. GP. GH, ou en termes analitiques $::$ $x + d. \sqrt{dx}. x.$ donc $xx + dx. = dg$, ou bien $xx = - dx + dg$

DEMONSTRATION.

ELLE eſt la même que la précedente.

REMARQUE I.

7. L'EQUATION précedente $xx = \frac{nabx - nabg}{mf}$, étant réduite à celle-ci $xx = dx - dg$, comme l'on a fait celle du cas précedent (n°. 5.), fait voir que ſi la moyenne proportionnelle entre DG (g), & CL (d) ſurpaſſe $\frac{1}{2}$ CL, le Problême ſera impoſſible : car alors les deux valeurs de x ſeront imaginaires.

REMARQUE II.

8. SI dans les deux conſtructions précedentes, le point F étoit tombé au-delà du point C, hors du triangle ; il auroit falu mener la parallele DG de l'autre côté du point G, qui auroit rencontré le côté AC, prolongé du côté de A dans le premier cas, & l'on ſe ſeroit ſervi du côté AC, comme on a fait du côté BC. FIG. 21, 24.

REMARQUE III.

9. CE ſeroit encore la même choſe, ſi le point D étoit donné ſur un des côtez BC prolongé : car DG parallele à AB, rencontreroit le côté AC prolongé du côté de A, & l'on trouveroit comme on vient de faire, le point E ; par où ayant mené la droite DEF, l'on auroit le triangle AEF, qui ſeroit au triangle ABC, comme n à m. Dans la FIG. 26.

Figure 26 $AG = f$. $AE = x$. $AF = x$. le point I doit être pris ſur AB du côté de A, en ſorte que $AB. AI :: m. n.$ CL parallele à AB doit être menée de l'autre côté de C, en ſorte qu'on puiſſe tirer GIL.

REMARQUE IV.

FIG. 27. 10. SI le point D étoit au ſommet de l'un des angles comme en A; il n'y auroit qu'à diviſer BC en F; en ſorte que $BC. BF :: m. n$, & mener AF : car en ce cas $ABC. ABF :: m. n$.

REMARQUE V.

FIG. 28. 11. SI le point D étoit ſur un des côtez AB; en nommant AB, a; BC, b; DB, g; qui ſont les données, & l'inconnue BF, x; l'on auroit ſelon l'hypotheſe $ab. gx :: m. n$; & partant $mgx = nab$; donc $x = \frac{nab}{mg}$: qui fournit cette conſtruction.

On diviſera BC en H, en ſorte que $BC. BH :: m. n$, & ayant pris BF quatrième proportionnelle à DB, AB, BH, l'on menera la ligne DF qui ſatisfera au Problême.

DEMONSTRATION.

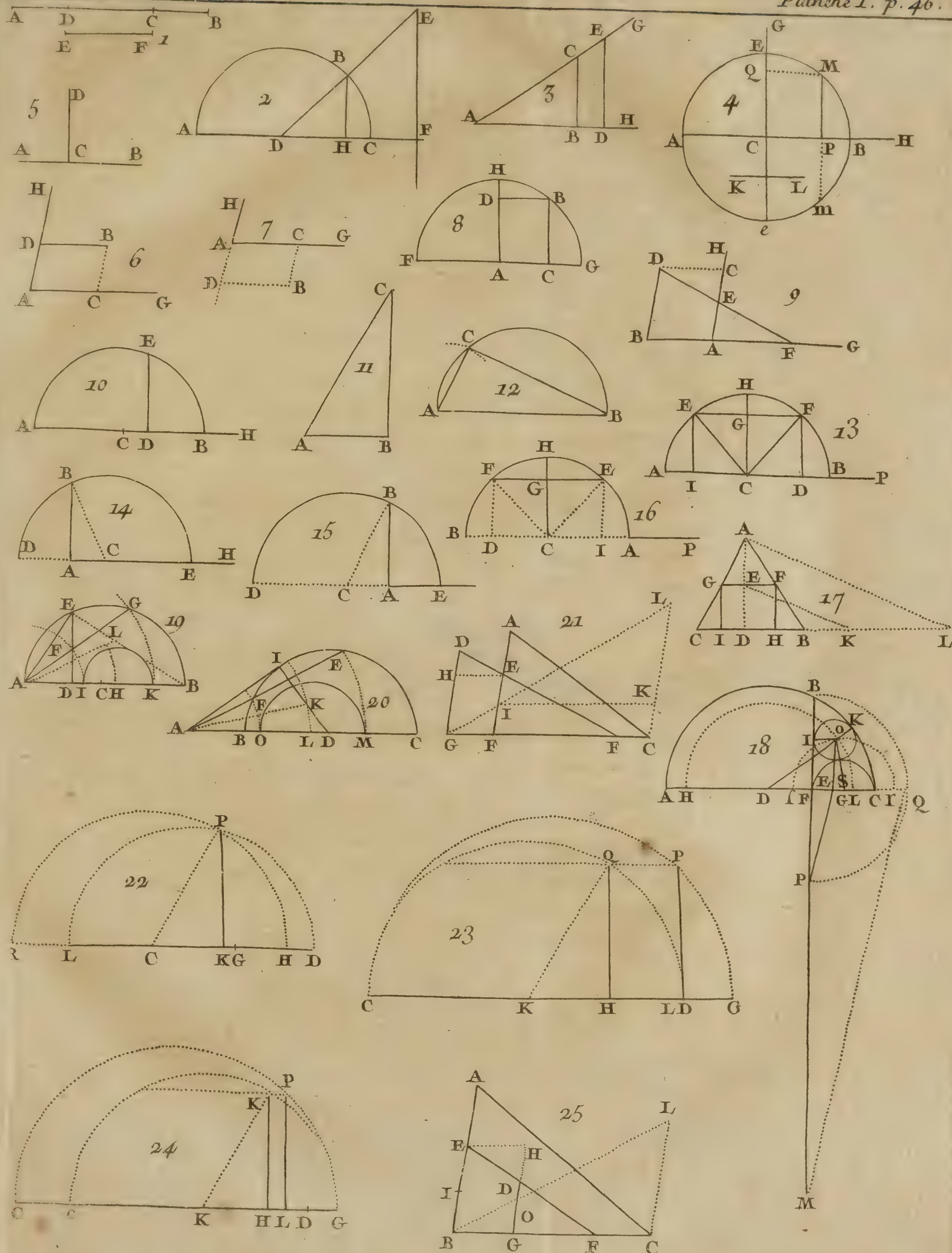
AYANT mené AH, les triangles ABH, DBF ſeront égaux; puiſque (conſt.) $DB. AB :: BH. BF$: mais le triangle ABC eſt au triangle $ABH :: BC. BH :: m. n$; donc $ABC. DBF :: m. n$. C. Q. F. D.

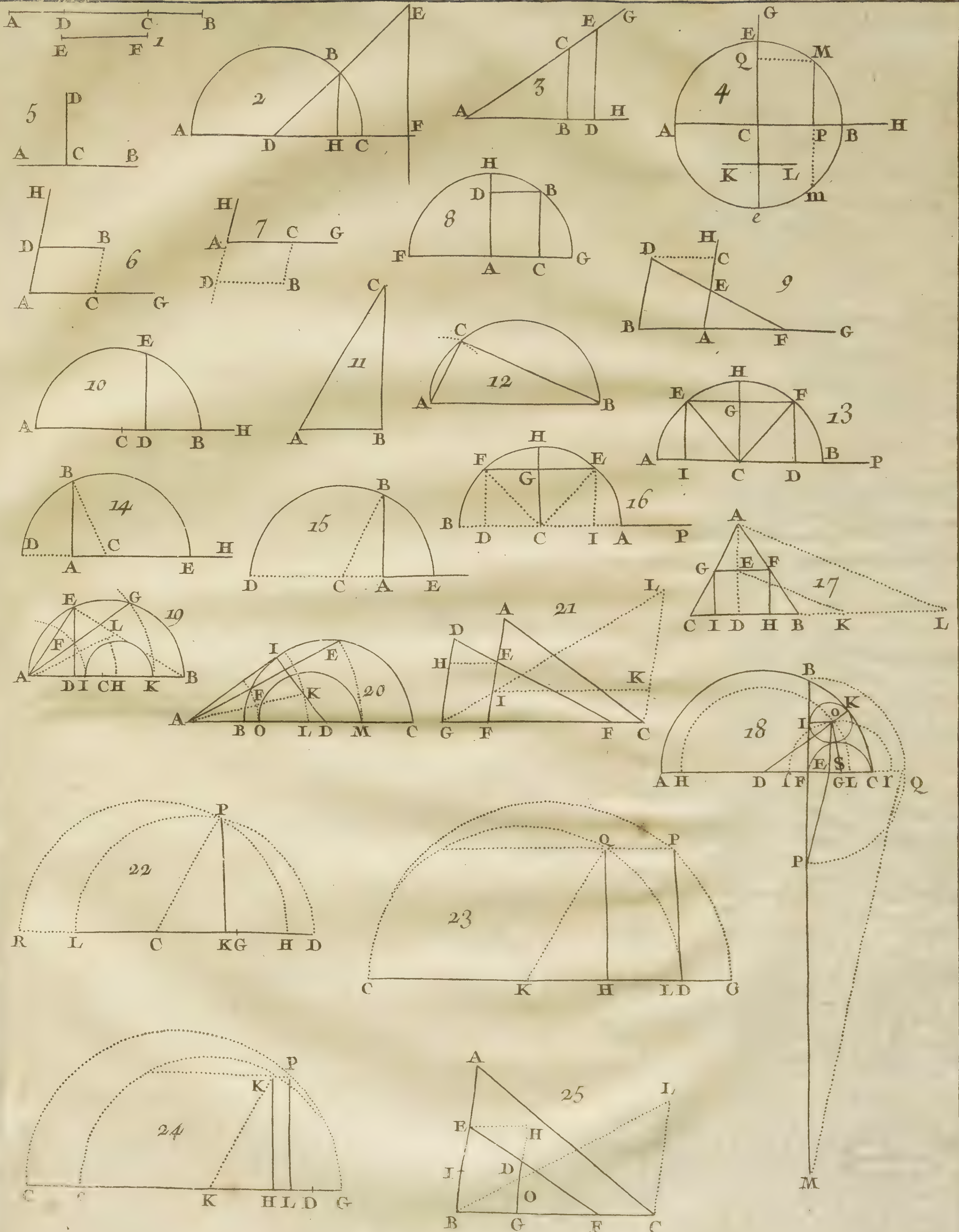
COROLLAIRE.

12. ON peut par le moyen de ce Problême, & des remarques qu'on y a faites, réſoudre toutes les queſtions de la Geodéſie.

FIG. 29. Soit par exemple, un rectiligne quelconque $ABCEGH$, & un point D hors de ce rectiligne, donnez de poſition, il faut mener la ligne DOF, qui diviſe le même rectiligne, de

maniere




1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25

maniere que la partie *OHGEF* ſoit à la partie *OABCF*, comme *m* à *n*.

On menera du point *D* aux angles du rectiligne des droites *DG*, *DE*, *DC*, *DB*. Or puiſque l'on connoît la ſuperficie du rectiligne entier, & qu'on peut connoître celle de toutes les parties qui le compoſent; on connoîtra auſſi ſi quelqu'une des lignes *DB*, *DC*, *DE*, *DG*, ſatisfait au Problême. Mais ſi aucune n'y ſatisfait, de ſorte que la partie *LHGE* ſoit trop petite, & la partie *KHGEC* trop grande; il eſt neceſſaire, ſelon cette hypotheſe, que la ligne *DOF* paſſe entre les lignes *DC*, *DE*, afin que la Figure ſoit diviſée dans la raiſon demandée : mais parceque l'on connoît le raport de toute la Figure à ſes parties *KABC*, *LABCE*, l'on connoîtra auſſi le raport du quadrilatère *LKCE* à ſa partie *OKCF*; c'eſt pourquoi, 1°. Si les lignes *KL*, *CE* ſont paralleles, il n'y a qu'à diviſer *CE* en *F*, en ſorte que ce *CE* ſoit à *CF* dans la raiſon convenable, & mener *DOF*, qui ſatisfera à la queſtion: car *CE*. *KL* :: *CF*. *KO*, ou *DCE*. *DKL* :: *DCF*. *DKO*; & *dividendo* *LKCE*. *DCE* :: *OKCF*. *DCF*. *permutando* *LKCE*. *OKCF* :: *DCE*. *DCF* :: *CE*. *CF*.

2°. Si ces lignes *CE*, *KL* ne ſont point paralleles, elles concourront de part ou d'autre en un point *P*, que l'on trouvera en cette ſorte. Ayant mené *LR* & *LQ* paralleles à *KC*, & à *CF*, ces droites ſeront données de grandeur auſſi bien que *KQ*. Soit donc fait à cauſe des triangles ſemblables *KQL*, *KCP*; *KQ*. *QL* :: *KC*. *CP*; *CP* ſera donc auſſi donnée de grandeur; c'eſt pourquoi tirant *KS* perpendiculaire à *CE*, qui ſera auſſi donnée, l'on aura la ſuperficie du triangle *KCP*; & par conſequent (n°. 9.), le raport de tout le triangle à ſa partie *OKCF*, & le Problême ſera réſolu. FIG. 30.

PROBLÊME PLAN.

13. DECRIRE *un triangle* ABC *rectangle en* A, *dont le plus petit côté* AB, *& la difference* DC, *des ſegmens de l'hypothénuſe, faits par la perpendiculaire* AE, *ſoient donnez de grandeur.* FIG. 31.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, l'on décrira du centre *A*, & du rayon *AB*, le cercle *GBF*, qui paſſera par le point *D*; puiſque *DC*, eſt la difference des ſegmens *BE*, *EC* de l'hypothenuſe *BC*; & ayant prolongé *AC* en *G*; *GC* ſera $= AB + AC$; & $FC = AC - AB$. Nommant donc les données *AB*, *a*; *DC*, *b*; & l'inconnue *CF*, *x*; *AC* ſera $a + x$; & *GC*, $2a + x$; & l'on aura à cauſe du cercle $CD\ (b) . CF\ (x) :: CG\ (2a + x) . CB = \frac{2ax + xx}{b}$; donc à cauſe de l'angle droit *BAC*. $DC^2 = AB^2 + AC^2$, ou en termes Algebriques $\frac{4aaxx + 4ax^3 + x^4}{bb} = 2aa + 2ax + xx$, ou en ordonnant l'équation,

$$x^4 + 4ax^3 + \begin{matrix} 4aaxx \\ - bbxx \end{matrix} - 2abbx - 2aabb = 0,$$ qui eſt une

équation du quatriéme degré; & qui ne peut être diviſée par aucun binome compoſé de l'inconnue, & d'un des diviſeurs du dernier terme: mais avant que de conclure quelle eſt la nature du Problême, il faut faire évanouir le ſecond terme. Faiſant donc $x + a = z$, l'on a $x = z - a$; & mettant cette valeur de *x* dans l'équation en la place de *x*, & les puiſſances de cette valeur en la place des puiſſances ſemblables de *x*, l'on aura cette nouvelle équation $z^4 \begin{matrix} - 2aazz \\ - bbzz \end{matrix} \begin{matrix} + a^4 \\ - aabb \end{matrix} = 0$; & comme le quatriéme terme eſt auſſi évanoui, il ſuit que le Problême eſt plan: car faiſant $ay = zz$, l'équation ſe changera en celle-ci, $aayy \begin{matrix} - 2a^3 y \\ - abby \end{matrix} \begin{matrix} + a^4 \\ - aabb \end{matrix} = 0$, ou $yy = \frac{2aay + bby + abb - a^3}{a}$, que l'on peut ramener à une des quatre formules précedentes, trouver par conſequent la valeur de *y*, & chercher enſuite une moyenne proportionnelle entre *y* & *a*, qui ſera la valeur de *z*, d'où ayant ôté *a*, on aura celle de *x* qu'il faloit trouver. Mais ces ſortes de conſtructions ſont très-compoſées; c'eſt pourquoi dans de pareils cas, il faut tâcher, en prenant d'autres voyes,

de trouver une équation du second degré, qui donneroit une construction beaucoup plus simple, plus élegante, & plus naturelle. Prenons donc BD pour l'inconnue; & l'ayant nommée x; BC sera $b+x$; BE, $\frac{1}{2}x$; & EC, $\frac{1}{2}x+b$; & l'on aura à cause de l'angle droit BAC, $BE \times EC = \frac{1}{4}xx + \frac{1}{2}bx = AE^2$: & à cause du triangle rectangle AEB, l'on aura $BE^2 + AE^2 = \frac{1}{4}xx + \frac{1}{4}xx + \frac{1}{2}bx = aa = AB^2$, qui se réduit à $xx = -bx + 2aa$; d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}bb + 2aa}$, qui donne cette construction. Fig. 31.

D, étant le commencement de x qui va vers B, on prendra sur $CD = b$, prolongée de part & d'autre, $DG = 2a = 2AB$, & $DH = a = AB$, & ayant décrit sur le diametre GH, le demi cercle GRH, on élevera au point D la perpendiculaire DR, qui rencontrera la circonference en R. Et du centre O, milieu de $DC = b$, on décrira par R le demi cercle BRK qui coupera DG au point cherché B. De sorte que DB sera la valeur positive de x, & DK sa valeur negative; c'est pourquoi ayant décrit sur l'hypothénuse BC, le triangle rectangle BAC, dont le petit côté AB soit $= a$, le Problême sera résolu. Fig. 32.

DEMONSTRATION.

Par la construction $AB = a$, & $DC = b$; il ne reste donc qu'à prouver que la perpendiculaire AE qui tombe de l'angle droit A sur l'hypothénuse BC, divise BD par le milieu en E.

La proprieté du cercle donne $BD \times DK = DR^2 = GD \times DH$; donc $BD . GD$ ou $2DH :: DH . DK$, ou en prenant la moitié des consequens, $BD . DH$ ou $AB :: AB . \frac{1}{2}DK$; donc $BD \times \frac{1}{2}DK$, ou $\frac{1}{2}BD \times DK = AB^2$; donc DK, ou $CB . AB :: AB . \frac{1}{2}BD$: Mais les triangles semblables CBA, ABE donnent $CB . AB :: AB . BE$; donc $AB . \frac{1}{2}BD :: AB . BE$; donc $\frac{1}{2}BD = BE$. C. Q. F. D.

PROBLÊME PLAN.

FIG. 33. 14. *UN quarré* ABCD *dont les côtez* AB, AD *sont prolongez étant donné; il faut trouver sur l'un des prolongemens* AE, *le point* E, *en sorte que la ligne menée par* E, *& par l'angle* C, *terminée par l'autre prolongement* BF, *soit égale à une autre ligne donnée* KL, *qui ne soit pas moindre que le double de la diagonale du quarré.*

Ayant supposé le Problême résolu, & nommé AD, ou AB, a; KL, b; & les inconnues AE, x; AF, y; DE sera, $x-a$; le triangle rectangle FAE donnera $AE^2+AF^2=xx+yy=bb=(hyp.)\,EF^2$, qui est une équation au cercle. Et les triangles semblables FAE, CDE; donneront $y.(FA.)\,x\,(AE)::a\,(CD).\,x-a\,(DE)$; donc $xy-ay=ax$, qui est une équation à l'hyperbole par raport à ses asymptotes; & ayant fait évanouir y, & ordonné l'équation, on aura:

$$A.\; x^4-2ax^3+2aaxx+2abbx-aabb=0,$$
$$\qquad\qquad\quad -bbxx$$

qui est une équation du quatriême degré, & qui ne peut être divisée par aucun binome; c'est pourquoi pour déterminer quelle est la nature du Problême, il faut, suivant les principes de Mr Descartes, & ce que nous avons dit article 4. n°. 18, faire évanouir le second terme. Soit pour ce sujet $x-\frac{1}{2}a=z$; donc $x=z+\frac{1}{2}a$; $xx=zz+az+\frac{1}{4}aa$; $x^3=z^3+\frac{3}{2}azz+\frac{3}{4}aaz+\frac{1}{8}a^3$; $x^4=z^4+2az^3+\frac{3}{2}aazz+\frac{1}{2}a^3z+\frac{1}{16}a^4$, & mettant ces valeurs de x, de xx, de x^3, & de x^4 dans l'équation A, elle deviendra celle ci.

$$B.\; z^4+\tfrac{1}{2}aazz+a^3z+\tfrac{5}{16}a^4 \;\; = 0.$$
$$\qquad -bbzz\;+abbz-\tfrac{1}{4}aabb,$$

où il n'y a point de second terme.

Pour transformer preſentement l'équation *B* en une équation du troiſiême degré, on ſe ſervira de ces deux équations :

C. $zz - yz - s = 0$.

D. $zz + yz + t = 0$, que je multiplie l'une par l'autre, pour avoir celle-ci :

$$E.\quad z^4 \begin{array}{l} - szz \\ - yyzz \\ + tzz \end{array} \begin{array}{l} - syz \\ - tyz \end{array} - ts = 0.$$

qui eſt ſemblable à l'équation *B*. Mais pour abreger le calcul, j'égale les quantitez connues de chaque terme de l'équation *B* à de ſimples lettres connues ; ſçavoir,

$\frac{1}{2} aa - bb = p$.

$a^3 + abb = q$.

$\frac{1}{16} a^4 - \frac{1}{4} aabb = r$. De ſorte que l'équation *B* devient celle-ci.

F. $z^4 + pzz + qz + r = 0$.

Je compare preſentement les deux équations *E* & *F*, terme à terme, chacun à ſon correſpondant ; ce qui me donne les trois équations ſuivantes : car les deux premiers termes ne donnent rien.

G. $t - yy - s = p$.

H. $- ty - sy = q$.

I. $- ts = r$.

L'équation *I* donne $s = \frac{-r}{t}$; & mettant en la place de *s*, cette valeur dans les deux équations *G* & *H*, & multipliant enſuite par *t*, l'on a les deux ſuivantes.

K. $tt - tyy + r = pt$.

L. $- tty + ry = qt$.

L'équation *K* donne $tt = tyy + pt - r$, & mettant cette valeur de *tt* dans l'équation *L*, l'on a $- ty^3 - pty + 2ry = qt$, d'ou l'on tire *M*. $t = \frac{2ry}{y^3 + py + q}$; & mettant cette valeur de *t* dans les équations *H* & *I*, l'on

aura les deux qui ſuivent, $N.\ \frac{-2ryy}{y^3+py+q} - sy = q$, & $O.\ \frac{-2sry}{y^3+py+q} = r$; d'où faiſant évanouir l'inconnue s, ôtant les fractions, & retranchant ce qui doit être retranché, l'on aura $P.\ y^6 + 2py^4 \begin{matrix} +ppyy \\ -4ryy \end{matrix} - qq = 0$, qui eſt l'équation transformée, & qui ſe rapporte au troiſiême degré; & remettant à preſent dans l'équation P, en la place de p, q, & r leurs valeurs, l'on aura,

$$Q.\ y^6 \begin{matrix} +aay^4 \\ -2bby^4 \end{matrix} \begin{matrix} +b^4yy \\ -a^4yy \end{matrix} \begin{matrix} -a^6 \\ -2a^4bb \\ -aab^4 \end{matrix} = 0$$

Si l'on tente preſentement toutes les diviſions de cette équation par les binomes qu'on peut former par le quarré de l'inconnue y, c'eſt-à-dire, par yy; (car il n'eſt point ici neceſſaire de les tenter par aucun autre); & par quelqu'un des diviſeurs Plans du dernier terme, l'on trouvera qu'elle ſe peut diviſer par celui-ci.

$R.\ yy - aa - bb = 0$; & le quotient ſera

$$S.\ y^4 \begin{matrix} +2aayy \\ -bbyy \end{matrix} \begin{matrix} +a^4 \\ +aabb \end{matrix} = 0.$$

qui eſt une équation du ſecond degré; & qui par conſequent fait connoître que le Problême eſt Plan.

Si l'on veut le réſoudre ſans chercher une autre équation du ſecond degré: Voici la méthode qu'on doit ſuivre.

L'on a déja l'equation $O.\ \frac{-2sry}{y^3+py+q} = r$, d'où l'on tire $T.\ s = -\frac{y^3-py-q}{2y}$. Il ne s'agit plus que de chercher une valeur ſemblable de t; ce qui ſe fait en cette ſorte. L'équation I donne $t = \frac{-r}{s}$, mettant donc cette valeur de t dans les deux équations G & H, l'on aura $-r - syy - ss = ps$, & $ry - ssy = qs$: & faiſant évanouir le quarré ss, l'on aura $-r - syy - \frac{ry+qs}{y}$

$= ps$, d'où l'on tire $s = \frac{-2ry}{y^3 + py - q}$; & cette valeur de s, substituée dans l'équation I, donne après avoir ôté les fractions, & ce qu'il y a à ôter, $V.\ t = \frac{y^3 + py - q}{2y}$. Si l'on met presentement dans les deux équations C, & D, en la place de s, & de t leurs valeurs prises dans les deux équations T, & V, l'on aura les deux suivantes.

$$zz - yz + \frac{y^3 + py + q}{2y} = 0, \&$$

$$zz + yz + \frac{y^3 + py - q}{2y} = 0, \text{ ou}$$

$$X.\quad zz - yz + \tfrac{1}{2} yy + \tfrac{1}{2} p + \tfrac{q}{2y} = 0, \&$$

$$Y.\quad zz + yz + \tfrac{1}{2} yy + \tfrac{1}{2} p \frac{-q}{2y} = 0$$

Mais l'équation R, donne $yy = aa + bb$, & $y = \sqrt{aa + bb}$.; l'on a aussi $p = \frac{1}{2} aa - bb$, & $q = a^3 + abb$; substituant donc dans les deux équations X, & Y en la place de y, de yy, de p, & de q, leurs valeurs; l'on aura après les réductions ordinaires,

$$zz - z\sqrt{aa + bb} + \tfrac{3}{4} aa + \tfrac{1}{2} a \sqrt{aa + bb} = 0, \&$$

$$zz + z\sqrt{aa + bb} + \tfrac{3}{4} aa - \tfrac{1}{2} a \sqrt{aa + bb} = 0, \text{ ou}$$

$$zz = z\sqrt{aa + bb} - \tfrac{3}{4} aa - \tfrac{1}{2} a \sqrt{aa + bb}, \&$$

$zz = - z\sqrt{aa + bb} - \frac{3}{4} aa + \frac{1}{2} a \sqrt{aa + bb}$, dont les racines sont,

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{aa + bb} \pm \sqrt{- \tfrac{1}{2} aa + \tfrac{1}{4} bb - \tfrac{1}{2} a \sqrt{aa + bb}}, \&$$

$z = - \frac{1}{2}\sqrt{aa + bb} \pm \sqrt{- \frac{1}{2} aa + \frac{1}{4} bb + \frac{1}{2} a \sqrt{aa + bb}}$. Mais pour ôter le second terme de l'équation A, l'on a fait $z = x - \frac{1}{2} a$; c'est pourquoi en mettant dans les deux dernieres équations, en la place de z, sa valeur $x - \frac{1}{2} a$; l'on aura les deux qui suivent.

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+bb}}.$$

$$x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+bb}},$$

dont la construction résout le Problême.

Il faut demeurer d'accord que cette méthode de Mr Descartes, de reconnoître la nature d'un Problême dont l'équation est du quatriême degré, & de tirer de cette équation du quatriême degré, deux équations du second, quand le Problême est Plan, est parfaitement belle, & digne de son genie; c'est pourquoi j'ai jugé à propos de la mettre ici tout au long; parceque je ne l'ai vûe nulle part entierement expliquée. Il est neanmoins à propos, comme on a déja remarqué, après avoir reconnu qu'un Problême dont l'équation est du quatriême degré est Plan, de chercher par d'autres voyes une équation du second degré; parceque la construction du Problême en devient plus simple, comme on va voir par cet exemple.

FIG. 34. 15. Les mêmes choses que dans l'énoncé du Problême, étant supposées, on prolongera BC vers G, l'on menera EG perpendiculaire à FE, qui rencontrera CG en G, & l'on abaissera du point E sur CG la perpendiculaire EH: ce qui formera les triangles semblables CBF, CEG, CHE, & EHG: & outre cela les triangles CBF, EHG égaux, puisque $BC = EH$; c'est pourquoi ayant nommé les données AB ou AD, a; KL ou FE, b; & les inconnues CG, x; CE, y; BG sera, $a + x$; & FC ou EG, $b - y$; les triangles semblables CBF, CEG, donneront $a\,(CB).\ b - y\,(CF) :: y\,(CE).\ x\,(CG)$; donc $ax = by - yy$; & le triangle rectangle CEG donnera $CG^2 = xx = bb - 2by + 2yy = CE^2 + EG^2$, ou $\frac{bb - xx}{2} = by - yy = ax$, ou $bb - xx = 2ax$, d'où l'on tire $x = -a \pm \sqrt{aa+bb}$, qui donne cette construction.

Soit prolongée CD en I, en sorte que $CI = KL$; décrit du centre B par I, le cercle IG, qui coupera BC prolongée en G; & sur le diametre CG, le demi cercle

CEG,

CEG, qui coupera *AD* prolongée *E* & *e*, ou la touchera en un ſeul point *E*, ſi le Problême eſt poſſible, c'eſt-à-dire, ſi *KL* ſurpaſſe ou égale le double de la diagonale du quarré *AC*. Je dis que la ligne *FE*, ou $ef = KL$; & que par conſequent le Problême eſt réſolu.

DE'MONSTRATION.

A Cauſe des triangles ſemblables *CBF*, *CEG*. $CB . CF :: CE . CG$; donc $CB \times CG = CF \times CE$. Et à cauſe du cercle *IG* dont le centre eſt *B*; $CI^2 = BG^2 - BC^2 = 2BC \times CG + CG^2 = 2CF \times CE + CE^2 + EG^2$; car par l'équation précedente $CB \times CG = CF \times CE$. 1°. en la multipliant par 2 on a $2BC \times CG = 2CF \times CE$. 2°. ajoutant $\overline{CG}^2$ on aura $2BC \times CG + \overline{CG}^2 = 2CF \times CE + \overline{CG}^2$. Mais $\overline{CG}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{EG}^2$. Donc $2BC \times CG + \overline{CG}^2 = 2CF \times CE + \overline{CE}^2 + \overline{EG}^2$, ou $CF^2 = FE^2$ $2CF \times CE + \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{FE}^2$. Car $CF + CE = FE$; donc $\overline{CF + CE} \times \overline{CF + CE} = \overline{FE}^2$, ou ce qui eſt la même choſe $\overline{CF}^2 + 2CF \times CE + \overline{CE}^2 = \overline{FE}^2$; donc $CI^2 = FE^2$; donc $CI = FE = KL$. C. Q. F. D.

On démontrera de même que $ef = KL$.

PROBLÊME PLAN.

16. *La ſomme* AB *des deux côtez* AE, EI *d'un triangle* AEI, *l'angle* AEI *que doivent former les deux côtez* AE, EI; *& la perpendiculaire* EG *menée de cet angle ſur la baſe* AI, *étant donnez, décrire le triangle* AEI. FIG. 35.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, ſoit prolongée *AE* en *B*, en ſorte que $EB = EI$, & menée par *A* la ligne *AD* parallele à *EI*, & égale à *AB*; la ligne menée par les points *B* & *I*, rencontrera *AD* en *D*: car $BE = EI$, & $BA = AD$. Soit faite *AK* perpendiculaire à *BD*, qui ſera diviſée par le milieu en *K*, puiſque le triangle *BAD*

est isoscele. Ayant enfin mené *BH* perpendiculaire à *AI* prolongée, & nommé les données *KB*, ou *KD*, c; la perpendiculaire *EG*, b; *AK*, d; & les inconnues *AI*, z; *KI*, x; *BH*, u; *BI* sera $c - x$, & *ID*, $c + x$.

Les triangles semblables *IAK*, *IBH* donneront z (*IA*). d (*AK*) :: $c - x$ (*IB*). u (*BH*); donc $u = \frac{cd - dx}{z}$. Et les triangles semblables *HBA*, *GEA*, & *BEI*, *BAD* donnent, u (*HB*). b (*GE*) :: *BA*. *EA* :: $2c$ (*BD*). $c + x$ (*ID*). d'où l'on tire $u = \frac{2bc}{c+x}$; donc $\frac{2bc}{c+x} = \frac{cd - dx}{z}$, ou $2bcz = ccd - dxx$: mais le triangle rectangle *AKI*, donne $xx = zz - dd$; c'est pourquoi en mettant cette valeur de xx, dans l'équation précedente, l'on en tire $zz = -\frac{2bcz}{d} + cc + dd$: Mais en nommant *AB*, a; l'on a, à cause du triangle rectangle *AKB*, $aa = cc + dd$; mettant donc dans l'équation en la place de $cc + dd$ sa valeur aa, l'on a celle-ci $zz = -\frac{2bcz}{d} + aa$, d'où l'on tire $z = -\frac{bc}{d} + \sqrt{\frac{bbcc}{dd} + aa}$, qui fournit cette construction.

Soit prise $AF = GE$, & menée *FL* parallele à *KB*; soit prolongée *KA* en *C*, en sorte que $AC = FL$; & ayant mené *AM* parallele à *KB*, & égale à *AB*, l'on décrira du centre *C* par *M*, le cercle *MN*, qui coupera *AK* prolongée en *N*; & du centre *A* par *N*, l'on décrira le cercle *NIO* qui coupera *KB*, en *I*; & ayant joint *AI*, l'on menera *IE* parallele à *DA*, qui formera le triangle *AIE*, qu'il faloit décrire.

DE'MONSTRATION.

Il est clair que $AE + EI = AB$, que l'angle *AEI*, est tel qu'on le souhaite, & que $AN = AI$. A cause de *FL* (const.) parallele à *KB*, l'on a *AK* (d). *KB* (c) :: *AF*, ou *GE* (b). $FL = \frac{bc}{d} =$ (const.) *AC*, & partant *CN* $\frac{bc}{d} + z$; & par la proprieté du cercle, $CN^2 - CA^2 = AM^2 = AB^2$; ce qui est en termes Algebriques $\frac{2bcz}{d} + zz = aa$, ou $zz = -\frac{2bcz}{d} + aa$ qui est l'équa-

tion que l'on a construite; d'où il suit que la construction précedente résout le Problême. *C. Q. F. D.*

J'ai copié ce Problême dans le Traité des lieux Geometriques de M. de la Hire, parcequ'il ouvre le chemin à la résolution de plusieurs Problêmes semblables, comme est celui qui suit: j'y ai ajouté la construction & la démonstration que cet Auteur n'avoit pas donnée.

PROBLÊME PLAN.

17. D*ECRIRE un triangle* AEI, *dont on connoît la somme des côtez* AE + EI = AB, *la base* AI, *& dont l'angle* AEI, *soit égal à un angle donné.* Fig. 35.

En supposant la préparation précedente, & nommant les données AK, d; AI, b; & l'inconnue KI, x; l'on aura par la proprieté du triangle rectangle AKI, $xx = bb - dd$; donc $x = \sqrt{bb - dd}$, qui donne cette construction.

Soit du centre A & du rayon AI, décrit le cercle OIN qui coupera KB au point cherché I; ce qui n'a pas besoin de démonstration.

PROBLÊME PLAN.

18. U*N rectangle* ABCD *étant donné, il faut décrire un autre rectangle* EHGF; *dont les côtez soient également éloignez de ceux du rectangle* ABCD, *& que le rectangle* ABCD, *soit au petit* EHGF *dans la raison donnée de* m *à* n. Fig. 36.

Ayant supposé le Problême résolu, & nommé les données AD, ou BC, a; AB, ou DC, b; & l'inconnue AL, ou LE, x; EF sera $a - 2x$, & EH, $b - 2x$.

L'on aura par les qualitez du Problême, $ab . ab - 2ax - 2bx + 4xx :: m . n.$ donc $mab - 2max - 2mbx + 4mxx = nab$, d'où l'on tire $xx = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}bx + \frac{nab - mab}{4m}$, d'où $xx - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}bx = \frac{nab - mab}{4m}$. Soit $\frac{nab - mab}{4m} = -gg$,

car $4m \cdot a :: b \cdot c = \frac{ab}{4m}$. donc $\frac{nab-mab}{4m} = cn - cm$. Mais puisque $n < m$ soit $n - m = -f$; donc $cn - cm = -fc$, & faisant $fc = gg$ on aura $cn - cm = -gg$, ou $\frac{nab-mab}{4m} = -gg$. Ceci supposé il faut achever le quarré & l'on aura $xx - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}aa + \frac{1}{8}ab + \frac{1}{16}bb = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{8}ab + \frac{1}{16}bb - gg$ en mettant $-gg$ pour $\frac{nab-mab}{4m}$, d'où tirant la racine quarrée on a $x - \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}b = \sqrt{\frac{1}{16}aa + \frac{1}{8}ab + \frac{1}{16}bb - gg}$; donc $x = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b \pm \sqrt{\frac{1}{16}aa + \frac{1}{8}ab + \frac{1}{16}bb - gg}$. Or $AK = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b$, car AI a été pris égal à $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$; mais ayant fait KO, ou $QL = g = \sqrt{\frac{mab - nab}{4m}}$, on aura $KL = \sqrt{\overline{AK}^2 - \overline{QL}^2} = \sqrt{\frac{1}{16}aa + \frac{1}{8}ab + \frac{1}{16}bb - gg}$; donc $x = AK - KL = AL$. Ce qui fournit cette construction.

Soit prise $AI = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & décrit sur le diametre AI, le demi cercle API. Et ayant élevé au centre K, la perpendiculaire KP, pris $KO = \sqrt{\frac{mab-nab}{4m}}$, & mené par O la ligne QOR, parallele à AI, qui rencontrera le demi cercle aux points Q & R, par où l'on menera QL & RM paralleles à PK, qui couperont AI aux points cherchez L & M. De sorte qu'ayant pris AS, BT, & BV égales à AL, l'on formera le rectangle $EHGF$, & le Problême sera résolu.

DÉMONSTRATION.

PAR la proprieté du cercle $AL \times LI = LQ^2$, ou en termes Algebriques $x \times \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - x = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}bx - xx = \frac{mab-nab}{4m}$, ou $xx = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}bx + \frac{nab-mab}{4m}$, qui est l'équation que l'on a construite. *C. Q. F. D.*

J'ai démontré la construction de ces deux derniers Problêmes algebriquement, pour indiquer la maniere de démontrer tous les autres de même; ce qui est si facile, que je ne crois pas qu'il soit necessaire d'apporter un plus grand nombre d'exemples.

Les Démonſtrations faites à la maniere des Anciens, éclairent plus l'eſprit que les Démonſtrations Algebriques, quoiqu'elles ne ſoient pas plus certaines : mais auſſi elles ne ſont pas ſi faciles à trouver, comme il eſt aiſé de juger par les Démonſtrations des Problêmes précedens, que l'on auroit pû démontrer par l'Algebre auſſi facilement que les deux derniers.

SECTION III.

Où l'on donne la Méthode de démontrer les Theorêmes de Geometrie.

MÉTHODE.

VIII. Aprés avoir mené les lignes que l'on juge neceſſaires, en ſuivant les Obſervations de l'article 4, on nommera celles qui doivent entrer dans la queſtion, comme lorſqu'on veut réſoudre un Problême avec cette différence, que l'on peut ſe ſervir de toutes les lettres indifféremment : car comme l'on ne cherche la grandeur d'aucune ligne, on les peut regarder comme étant toutes connues, ou inconnues.

Cela fait, on exprimera en termes Algebriques, les veritez que l'on veut démontrer, & on cherchera des équations par les proprietez du triangle rectangle, & des triangles ſemblables, ou autrement, que l'on ramenera par le moyen des ſubſtitutions aux mêmes expreſſions, que celles qui expriment les veritez dont il s'agit, & alors le Theorême ſera démontré.

S'il arrive que tous les termes de l'équation ſur laquelle on opere, ſe détruiſent, de ſorte qu'il reſte $0 = 0$, le Theorême ſera encore démontré : car c'eſt une marque que la choſe eſt telle qu'on l'a ſuppoſée, ſans qu'il ſoit neceſſaire de déterminer la grandeur d'aucune des lignes qui ont été nommées. Ceci arrive ordinairement lorſque

l'on regarde les Theorêmes qu'on veut démontrer, comme des Problêmes qu'on veut résoudre.

Il arrive aussi quelquefois que l'on croit résoudre un Problême, & il se trouve par la mutuelle destruction des termes de l'équation, que c'est un Theorême, qui se trouve aussi par ce moyen démontré. Tout ceci sera éclairci par les exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

Theorême.

FIG. 37. 1. *SI une ligne droite donnée* AB, *est coupée également en* C, *& inégalement en* D; *le quarré de la moitié* CB *moins le quarré de la partie du milieu* CD, *sera égal au rectangle des deux parties inégales* AD, DB.

Ayant mommé AC, ou CB, a; CD, b; AD, sera, $a+b$; & DB, $a-b$.

Il faut démontrer que $aa-bb$ (CB^2-CD^2) $= AD \times DB$.

DEMONSTRATION.

EN multipliant $a+b$ (AD) par $a-b$, (DB) l'on aura $aa-bb$ (CB^2-CD^2) $= AD \times DB$. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE II.

Theorême.

FIG. 38. 2. *SI une ligne droite* AB, *coupée par le milieu en* C, *est prolongée en* D *d'une grandeur quelconque. Je dis que le quarré de* CD *moins le quarré de* CB, *sera égal au rectangle de la toute* AD, *par la partie prolongée* BD.

Ayant nommé CD, a; AC, ou CB, b; AD sera $a+b$; & BD, $a-b$.

Il faut démontrer que $aa-bb$ (CD^2-CB^2) $= AD \times DB$.

DEMONSTRATION.

Si l'on multiplie $a+b$ (AD) par $a-b$ (DB), l'on aura $aa-bb$ (CD^2-CB^2) $= AD \times DB$. *C. Q. F. D.*

On démontrera de même les autres propositions du second Livre d'Euclide, où il s'agit des proprietez des lignes divisées de différentes manieres.

EXEMPLE III.

Theorême.

3. *DANS tout triangle obtusangle* ABC, *dont l'angle* ABC *est obtus, si l'on prolonge un des côtez* BC *du côté de* B, *& que l'on abaisse du point* A *sur le prolongement, la perpendiculaire* AD; *le quarré du côté* AC *opposé à l'angle obtus, sera égal à la somme des quarrez des deux autres côtez* AB, BC, *& outre cela à deux rectangles dont* BC *est un côté, & le prolongement* BD, *l'autre.* FIG. 39.

Ayant nommé AC, a; AB, b; BC, c; DB, d; AD, g; DC sera $C+d$.

Il faut prouver que aa (AC^2) $= bb+cc+2cd$ ($AB^2+BC^2+2bc \times BD$).

DE'MONSTRATION.

A Cause du triangle rectangle ADC; aa (AC^2) $= gg$ (AD^2) $+ dd + 2cd + cc$ (DC^2): mais le triangle rectangle ADB donne $bb = gg + dd$; mettant donc en la place de $gg+dd$ sa valeur bb; l'on aura $aa = bb + 2cd + cc$. *C. Q. F. D.*

Si l'on fait DB ($=d$) $=0$, le point B tombera en D, FIG. 40.
& l'angle ABC sera droit; & l'on aura $aa = bb + cc$: car $2cd$ devient nulle à cause de $d=0$: mais si l'on fait d negative, & moindre que $c = BC$; le point D tombera entre B, & C; & partant les deux angles ABC, & C seront aigus, & l'on aura en changeant le signe du terme où d se rencontre, $aa = bb - 2cd + cc$, ou $aa + 2cd = bb + cc$,

ou $AC^2 + 2BC \times BD = AB^2 + BC^2$; c'est-à-dire que dans tout triangle, le quarré du côté opposé à un angle aigu, avec deux fois le rectangle du côté sur lequel tombe la perpendiculaire, par la partie interceptée entre la perpendiculaire, & cet angle aigu, est égal à la somme des quarrez & des deux autres côtez.

EXEMPLE IV.

Theorême.

FIG. 41. 4. SI *dans un cercle* ABGD, *dont le centre est* C, *l'on mene librement deux droites* BE, DF *qui se coupent en* O. *Je dis que* BO × OE = DO × OF.

L'on menera par le point O, le diametre $ACOG$, les rayons CB, CD, & les perpendiculaires CI sur BE, & CK sur DF; & ayant nommé les rayons CA, CG, CB, CD, a; BI, ou IE, b; DK, ou KF, c, OI, d; OK, f; CI, g; CK, h; CO, k; BO sera, $b+d$; OE, $b-d$; DO, $c+f$; & OF, $c-f$. Il faut démontrer que $bb-dd$ ($BO \times OE$) $= cc-ff$ ($DO \times OE$).

DE'MONSTRATION.

LEs triangles rectangles CIB, CKD, CIO, CKO, donnent 1°. $aa = bb + gg$, 2°, $aa = cc + hh$, 3°. $kk = dd + gg$, 4°. $kk = ff + hh$; & faisant évanoüir aa dans les deux premieres équations, kk dans la troisiême & quatriême, l'on aura 5°. $bb + gg = cc + hh$, 6°. $dd + gg = ff + hh$; & soustrayant les deux membres de la sixiême équation des deux membres de la cinquiême, le premier du premier, & le second du second, il viendra $bb - dd = cc - ff$. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE

EXEMPLE V.

Theorême proposé en forme de Problême.

5 UN *cercle* AEBF, *dont le centre est* C, *&* *un diametre* AB *étant donnez; il faut trouver au dedans du cercle le point* D, *d'où ayant abaissé la perpendiculaire* DI *sur le diametre* AB; *&* *par où ayant mené une droite quelconque* EDF; ED × DF + DI^2 *soit* = AI × IB. FIG. 42.

Ayant mené par D la droite GDH parallele à AB; puisque $GD \times DH = ED \times DF$, on peut mettre $GD \times DH$ en la place de $ED \times DF$; de sorte que le Problême se réduit à trouver le point D; en sorte que $GD \times DH + DI^2 = AI \times IB$.

Ayant supposé le Problême résolu, mené CK parallele à ID, le rayon CH, & nommé les données CH, AC, ou CB, a; & les inconnues CI, ou KD, x; CK, ou ID, y; AI sera $a - x$; IB, $a + x$; KH, $\sqrt{aa - yy}$; DH, $\sqrt{aa - yy} + x$; DG, $\sqrt{aa - yy} - x$, & les conditions du Problême donneront $aa - yy - xx$ $(GD \times DH) + yy$ $(DI^2) = aa - xx$ $(AI \times IB)$ qui se réduit à $0 = 0$. C'est pourquoi le Problême proposé est un Theorême, & comme il ne reste aucune ligne pour déterminer la position du point D; il suit que l'on peut prendre ce point par-tout où l'on voudra dans le cercle.

L'on auroit pû démontrer ce Theorême comme le précedent, & l'on pourroit aussi démontrer tous les Theorêmes, comme on a fait celui-ci, en les considerant comme des Problêmes.

EXEMPLE VI.

Theorême.

FIG. 43. 6. *LES parallelogrammes* BD, CE, *& les triangles* ABC, DCF *qui ont même hauteur* AG, *sont entr'eux comme leurs bases* BC, CF.

Ayant nommé BC, a; CF, b; & la hauteur AG, c; l'on aura $ac =$ au parallelogramme BD que je nomme, x, & $bc =$ au parallelogramme CE, que je nomme y; il faut démontrer que $x(BD).\ y.(CE) :: a.\ b$.

DÉMONSTRATION.

PUISQUE $x = ac$, & $y = bc$, l'on a $x.\ y :: ac.\ bc$; donc $bcx = acy$, ou $bx = ay$; donc $x.y :: a.\ b$. *C.Q.F.D.*

C'est la même chose pour les triangles.

EXEMPLE VII.

Theorême.

FIG. 44. 7. *LES triangles semblables* ABC, DEF, *sont entr'eux comme les quarrez de leurs côtez homologues* AB, DE.

Ayant nommé AB, a; BC, b; DE, c; EF, d; le triangle ABC, x; & le triangle DEF, y; les produits $ab\,(AB \times BC)$, & $cd\,(DE \times BF)$ seront en même raison que les triangles ABC, & DEF, ou x, & y; c'est pourquoi l'on aura $ab.\ cd :: x.\ y$; donc $cdx = aby$: mais la ressemblance de ces triangles donne $a.(AB)\ b :: (BC) :: c\,(DE)\,d.(EF)$; donc $ad = bc$; donc $d = \frac{bc}{a}$; & mettant cette valeur de d dans la premiere équation, l'on aura $\frac{bccx}{a} = aby$, ou $ccx = aay$; donc $x.y :: aa.\ cc :: AB^2.\ DE^2$. *C.Q.F.D.*

L'on démontrera de même, que tous les polygones semblables sont entr'eux comme les quarrez de leurs côtez homologues. Et comme les cercles sont aussi des polygones semblables d'une infinité de côtez, dont les

diametres sont les côtez homologues ; il suit que les cercles sont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres, ce que l'on démontre aussi facilement que pour les triangles semblables.

EXEMPLE VIII.

Theorême.

8. *LES solides semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtez homologues.*

Soient deux Spheres *AB* & *CD* ; ayant nommé le diametre *AB* de la Sphere *AB*, a ; sa circonference c ; le diametre *CD* de la Sphere *CD*, b ; sa circonference, d ; la Sphere *AB*, x ; & la Sphere *CD*, y. Il faut démontrer que $x . y :: a^3 , b^3$. FIG. 45, 46.

DE'MONSTRATION.

LA Sphere *AB* est égale à $\frac{aac}{6}$, & la Sphere $CD = \frac{bbd}{6}$; donc $x . y :: \frac{aac}{6} . \frac{bbd}{6} :: aac . bbd$; donc $bbdx = aacy$: Mais les cercles étant des polygones semblables, leurs diametres sont comme leurs circonferences ; c'est pourquoi $a . b :: c . d$; donc $ad = bc$; & partant $d = \frac{bc}{a}$; mettant donc cette valeur de d dans la premiere équation, l'on a $\frac{b^3cx}{a} = aacy$, ou $b^3 x = a^3 y$; donc $x . y :: a^3 . b^3$. *C. Q. F. D.*

On démontrera la même chose, & de la même maniere pour les autres solides semblables.

EXEMPLE IX.

Theorême.

9. *LES triangles* ABC, DEF *dont les bases* BC, EF, *&* *les hauteurs* AG, DH *sont en raison reciproque, sont égaux.* FIG. 47.

Ayant nommé *BC*, a; *EF*, b; *AG*, c; *DH*, d; le triangle *ABC*, x; & le triangle *DEF*, y; l'on aura le triangle $ABC = \frac{ac}{2} = x$, & le triangle $DEF = \frac{bd}{2} = y$; donc $x . y :: \frac{ac}{2} . \frac{bd}{2} :: ac . bd$; donc $bdx = acy$: Mais (*Hyp*) $a . b :: d . c$; donc $ac = bd$; c'est pourquoi la premiere équation $bdx = acy$ devient $x = y$, $ABC = DEF$. *C. Q. F. D.*

On démontrera de la même maniere que les parallepipedes, les prismes, les cilindres, les cones & les piramides, dont les bases & les hauteurs sont en raison reciproque, sont en raison d'égalité.

On ne donnera pas davantage d'exemples de la Méthode de démontrer par l'Algebre les Theorêmes de Geometrie : car les quatre Sections suivantes, où l'on démontrera les proprietez les plus considerables des Sections coniques, en fourniront un assez grand nombre.

SECTION IV.

Des Sections du Cone & du Cilindre.

DÉFINITIONS GENERALES.

FIG. 48, 49, 50. IX. 1. ON appelle *Section Conique*, une ligne courbe *IDH*, qui est la commune Section d'un Plan *EDF*, & de la superficie d'un Cone *ABC*, dont *A* est le sommet; & la base est un cercle dont le diametre est *BC*.

2. Le triangle *ABC* est appellé *le triangle par l'axe*; parcequ'il est la commune Section du Cone & du Plan qui passe par le sommet *A*, & par le diametre *BC* de la base, & que l'axe du Cone, est dans le Plan du même triangle *ABC*.

SUPPOSITION.

3. ON ſuppoſe que le Plan *EDF*, eſt perpendiculaire au Plan du triangle *ABC*, & que le plan du triangle *ABC*, eſt perpendiculaire à la baſe du Cone.

COROLLAIRE.

4. D'Où il ſuit que *DG*, qui eſt la commune Section du Plan *EDF*, & du triangle *ABC*, eſt perpendiculaire à *EGF*, qui eſt la commune Section du même Plan *EDF*, & de la baſe du Cone ; & que la même *EGF*, eſt perpendiculaire à *BC* ; & par conſequent coupée (Fig. 48, & 50.) par le milieu en *G* ; d'où l'on conclura auſſi que ſi l'on mene par quelque point *L* de la ligne *DG*, une ligne *MN* parallele à *BC*, & une autre ligne *IH* parallele à *EF* ; ces deux lignes *MN*, & *IH*, ſeront dans un Plan parallele à la baſe du Cone, dont la commune Section avec la ſuperficie du Cone, ſera un cercle qui paſſera par les points *M*, *I*, *N*, *H*, & dont le diametre ſera *MN*, qui coupera à angles droits, & par le milieu en *L*, la ligne *IH*.

Il ſuit auſſi que le point *D*, qui eſt commun à la courbe *IDH*, & au côté *AB* du triangle *ABC*, eſt plus près du ſommet *A* dans les ſuppoſitions précedentes, que tout autre point de la même courbe.

DEFINITIONS PARTICULIERES.

5. LA Section conique *IDH*, eſt nommée *parabole*, lorſque le Plan coupant *EDF*, eſt parallele à un des côtez *AC* du Cone ou du triangle *ABC* ; *DG* eſt nommée *l'axe* de la parabole ; *D*, ſon *ſommet*, *DL*, l'*abciſſe*, ou la *coupée* ; *IL*, ou *LH*, l'*appliquée*, ou l'*ordonnée* à l'axe. FIG. 48.

6. La Section conique *IDH*, eſt appellée, *ellipſe*, lorſque le Plan coupant *EDF*, coupe les deux côtez *AB*, *AC* du Cone ou du triangle par l'axe, & n'eſt point parallele à la baſe du Cone. La ligne *Dd* eſt nommée l'*axe*, FIG. 49.

ou *diametre principal*; le point *K* milieu de *Dd*, le *centre*; la ligne *VKR* menée par le centre *K* perpendiculaire à *Dd*, l'*axe*, ou le *diametre conjugué* à l'axe *Dd*; *DL*, l'*abcisse* ou la *coupée*; *LI* ou *LH*, l'*ordonnée* ou l'*appliquée* à l'axe *Dd*.

Il peut arriver un cas où la Section est un cercle, quoique le Plan coupant ne soit point parallele à la base du Cone: mais cela ne fait rien à notre dessein.

FIG. 50. 7. La Section conique *IDH*, est appellée *hyperbole*, lorsque le Plan coupant *EDF*, coupe aussi la superficie conique opposée, & y forme une autre hyperbole *edf*, opposée à la premiere, que l'on démontrera ailleurs lui être égale, & semblable; *Dd* est nommée l'*axe* déterminé de l'hyperbole, ou des hyperboles opposées; *D*, & *d*, le *sommet* de l'axe *Dd*; *DL*, l'*abcisse*, ou la *coupée*; *LI*, ou *LH*, l'*appliquée*; ou l'*ordonnée*; le point *K* milieu de *Dd*, le *centre*.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 48. 8. E*N supposant les mêmes choses que l'on a supposées dans la Figure où la courbe* IDH *est une parabole*; & *outre cela, si on mene* DO *parallele à* BC, *ou à* MN; *si on prend* AP = DO, & *qu'on mene* PQ *parallele à* DO, *ou à* MN. *Je dis que* $DL \times PQ = LI^2 = LH^2$.

Puisque le Plan coupant *EDF* est (nº. 5.) parallele à *AC*, *AP* = *DO* sera = *LN*; & ayant nommé les données *AO*, *b*; *DO*, ou *AP*, ou *LN*, *c*; *PQ*, *p*; & les inconnues *DL*, *x*; & *LI*, *y*.

Il faut prouver que px ($PQ \times DL$) $= yy$ (LI^2).

DÉMONSTRATION.

LEs triangles semblables *AOD*, *DLM*, donnent *AO* (b). *OD* (c) :: *DL* (x). $LM = \frac{cx}{b}$: Or (nº. 4.), & par la proprieté du cercle ($LM \times LN$) $\frac{ccx}{b} = (LI^2) = yy$:

mais la ressemblance des triangles *AOD*, *APQ* donne b. (*AO*). c (*OD*) :: c (*AP*). p (*PQ*) ; donc $cc = bp$. Mettant donc bp en la place de cc dans la premiere équation, l'on aura $px = yy$. *C. Q. F. D.*

DE'FINITION.

9. LA ligne $PQ = p$, est appellée le *parametre* de l'axe de la parabole. FIG. 48.

PROPOSITION II.

Theorême.

10. *EN suppofant les mêmes chofes que dans la Figure où la courbe* IDH *eft une ellipfe ; & outre cela fi l'on divife* D d *par le milieu en* K, *& fi l'on mene* SKT *parallele à* MN, *&* VKR *parallele à* HI ; RV, *fera la commune Section de l'ellipfe, & d'un cercle* SRTV, *dont le diametre eft* ST, *& qui eft coupé dans la fuperficie Conique par un Plan parallele à la bafe du Cone, ou au Plan du cercle* MINH, *puifque* HI *eft (nº. 4.) la commune Section de l'ellipfe, & du cercle* MINH. *De forte que* V *&* R *feront dans la circonference du cercle* SRTV, *& dans celle de l'ellipfe. Cela pofé, je dis que* $DL \times Ld . LI^2 :: DK^2 . KR^2$. FIG. 49.

Ayant nommé les données *DK*, ou *Kd*, a ; *SK*, g ; *KT*, f ; *KV*, ou *KR*, b ; & les indéterminées *KL*, x ; *LI*, ou *LH*, y ; *DL* fera $a - x$, & *dL*, $a + x$.

Il faut démontrer que $aa - xx$ ($DL \times Ld$) . yy (LI^2) :: aa (DK^2) . bb (KR^2).

DE'MONSTRATION.

LEs triangles femblables *dKT*, *dLN*, & *KDS*, *LDM*, donnent $dK (a) . KT (f) :: dL (a + x) . LN = \frac{af + fx}{a}$, & $KD (a) . KS (g) :: LD (a - x) LM = \frac{ag - gx}{a}$;

donc par la proprieté du cercle $\frac{aafg - afgx + afgx - fgxx}{aa}$ $(LN \times LM) = yy\ (LI^2)$, qui se réduit à $\frac{aafg - fgxx}{aa} = yy$: mais $fg = TK \times KS =$ (par la proprieté du cercle) $KR^2 = bb$; c'est pourquoi mettant dans l'équation précedente pour fg sa valeur bb, l'on aura $\frac{aabb - bbxx}{aa} = yy$, ou $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, d'où l'on tire $aa - xx . yy :: aa . bb$. *C. Q. F. D.*

Si l'on avoit nommé DL, x; l'on auroit trouvé cette équation $2ax - xx = \frac{aayy}{bb}$.

PROPOSITION III.

Theorême.

FIG. 50. 11. E*N suppofant les mèmes chofes que l'on a fuppofées dans la Figure où la courbe* IDH *eft une hyperbole, & outre cela, fi l'on divife* Dd *par le milieu en* K, *& qu'ayant mené* KTS *parallele à* MN, *on trouve une moyenne proportionnelle* KR *entre* KS, *&* KT. *Je dis que* $DL \times Ld . LI^2 :: DK^2 . KR^2$.

Ayant nommé les données KD, a; KR, b; KS, g; KT, f; & les indéterminées KL, x; LI, ou IH, y; LD fera, $x - a$; & Ld, $x + a$.

DE'MONSTRATION.

LEs triangles femblables dKT, dLN, & DKS, DLM, donnent, $dK\ (a) . KT\ (f) :: dL\ (x + a) . LN = \frac{fx + af}{a}$, & $DK\ (a) . KS\ (g) :: DL\ (x - a) . LM = \frac{gx - ag}{a}$; donc par la proprieté du cercle $\frac{gfxx - aafg}{aa}$ $(LM \times LN) = yy$ (LI^2).

(LI^2). L'on a auſſi par la conſtruction g (KS). b (KR) :: b. (KR). f (KT); donc $gf = bb$; c'eſt pourquoi ſi l'on met dans l'équation précedente, en la place de gf ſa valeur bb, l'on aura $\frac{bbxx - aabb}{aa} = yy$, ou $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, d'où l'on tire $xx - aa . yy :: aa . bb$. *C. Q. F. D.*

Si l'on avoit nommé DL, x; l'on auroit eu cette équation $2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$.

DE'FINITION.

12. LA ligne VKR double de KR menée par K parallele à IH, eſt appellée l'*axe conjugué* à l'axe Dd. FIG. 49, 50.

13. Dans l'ellipſe & dans l'hyperbole, la troiſiême proportionnelle à deux diametres conjuguez quelconques, eſt appellée le *parametre* de celui qui occupe le premier lieu dans la proportion.

14. Suivant cette Définition, il eſt aiſé de déterminer le parametre de l'axe Dd dans l'ellipſe, & dans l'hyperbole: car il n'y a qu'à prendre $DP = 2KT$; & la droite PQ, parallele à MN, qui rencontre le côté AB du cone en Q, ſera le parametre qu'on cherche: car, ayant nommé la ligne PQ, p; les triangles ſemblables DKS, DPQ, donnent a (DK). g (KS) :: $2f$ (DP, ou $2KT$). p (PQ); donc $pa = 2fg$: mais (nº. 11,) $fg = bb$; donc $pa = 2bb$, d'où l'on tire $a . b :: 2b . p$, ou $2a . 2b :: 2b . p$, c'eſt-à-dire $Dd . RV :: RV . PQ$.

15. Puiſque (nº. 14.) $a . b :: 2b . p :: b . \frac{1}{2}p$; donc $aa . bb :: a . \frac{1}{2}p :: 2a . p$; donc $aap = 2abb$; donc $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$; c'eſt pourquoi, ſi l'on met dans les deux équations précedentes (nº. 10, & 11,) au lieu de $\frac{aa}{bb}$ ſa valeur $\frac{2a}{p}$; l'on aura $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$, & $xx - aa = \frac{2ayy}{p}$; d'où l'on tire $aa - xx$, ou $xx - aa . yy :: 2a . p$, c'eſt-à-dire, $DL \times LD^d . LI^2 :: Dd . PQ$.

PROPOSITION IV.

Theorême.

FIG. 51. 16. *LA même hyperbole* IDH, *dont l'axe déterminé est* Dd, *le centre* K, *le diametre ou l'axe conjugué* RV *perpendiculaire à* Dd, *une ordonnée* IL *parallele à* RV, *étant mise sur un Plan. Je dis qu'ayant fait au sommet* D, DB *&* DE *paralleles, & égales à* KR, *ou* KV; *les lignes* KB, KE *menées du centre* K *par les points* B, E, *& indéfiniment prolongées, ne rencontreront jamais l'hyperbole, & qu'elles s'en approcheront de plus en plus à l'infini.*

DE'MONSTRATION.

AYANT mené du sommet D, les droites DG, DO paralleles à KB, & à KE; du point I, les droites IM, IP paralleles aux mêmes KE, KB, & prolongé IL de part & d'autre, en sorte qu'elle rencontre KB & KE en C, & F. & nommé, comme dans la proposition précedente, les données DK, a; DB, ou DE, b; KO, ou GD, ou KG, ou OD, qui sont toutes égales, c; les indéterminées KL, x; LI, ou LH, y; IP ou MK, f; IM, ou PK, z.

Les triangles semblables KDB, KLC, donnent $KD (a)$. $DB (b) :: KL (x)$. $LC = \frac{bx}{a}$; donc $IC = \frac{bx}{a} - y$ & $IF = \frac{bx}{a} + y$: car puisque (const.) $DB = DE$, LC sera $= LF$; & puisque (n°. 4.) $LI = LH$, IC sera $= HF$. De plus, les triangles semblables DBG, ICM, & DEO, IFP donnent, $b (DB) . c (DG) :: \frac{bx}{a} - y (IC) . z (IM)$, & $b (DE) . c (DO) :: \frac{bx}{a} + y (IF) . f (IP)$, d'où l'on tire ces deux équations $bz = \frac{bcx}{a} - cy$, & $bf = \frac{bcx}{a} + cy$: mais l'on a par la Proposition précedente $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$; c'est pourquoi si on fait évanouir x & y, par le moyen de ces trois équations, l'on aura celle-ci $fz = cc$:

$$xx - aa = \frac{aayy}{bb}$$

$$bz = \frac{bcx}{a} - cy \qquad bs = \frac{bcx}{a} + cy \qquad \text{D} \quad bbxx - aabb = aayy$$

A $abz = bcx - acy$ B $abs = bcx + acy$

$acy = bcx - abz = abs - bcx = acy$

div. par b. $cx - az = as - cx$, ou

$2cx = as + az$, ou

de B on a $x = \frac{abs - acy}{bc}$ E

donc joignant C & E on a

$$\frac{as + az}{2c} = \frac{abs = acy}{bc}$$

Div. par a & mult. par $2c$ & bc, on a transp. $- acy$

C $x = \frac{as + az}{2c}$, donc

$$xx = \frac{aass + 2aasz + aazz}{4cc}$$

$2cy = bs - bz$ ou

$$y = \frac{bs - bz}{2c} \text{ donc}$$

$$yy = \frac{bbss - 2bbsz + bbzz}{4cc}$$

ſubſtituant les valeurs de xx & yy dans D, on aura

$$\frac{\overline{aass + 2aasz + aazz} \times bb}{4cc} - aabb = \frac{aa \times \overline{bbss - 2bbsz + bbzz}}{4cc}$$

diviſant tout par $aabb$ après avoir multiplié par $4cc$ on aura $ss + 2sz + zz - 4cc = ss - 2sz + zz$ qui ſe réduit à $4sz = 4cc$ ou $sz = cc$; c'eſt-à-dire, $PI \times IM = KG \times GD$, qui fait voir que s, ou PI, ou MK croiſſant, z ou MI diminue; ce qui peut aller à l'infini. Et comme sz, ou $PI \times IM$, doit toujours être $= KG \times GD$; il ſuit que quelque grande que l'on ſuppoſe s, ou PI, ou KM, il faut que MI ait encore quelque longueur; & partant KM ne rencontrera jamais l'hyperbole IDH. *C. Q. F. D.*

DE'FINITION.

LEs lignes KC, & KF ſont nommées *aſymptes* de l'hyperbole.

COROLLAIRE.

IL eſt clair que tous les parallelogrammes, comme $KIMP$, ſont égaux entr'eux, & au parallelogramme

KGDO, en quelqu'endroit de l'hyperbole que l'on prenne le point *I*.

PROPOSITION V.

Theorême.

FIG. 52. 17. SOIT AB *une ſuperficie cylindrique coupée par un Plan* AB *qui paſſe par l'axe du cylindre. Je dis que ſi l'on coupe la ſuperficie cylindrique par un autre Plan* dIDHd *perpendiculaire au Plan* AB, *& incliné à l'axe du cylindre, la commune Section* dIDHd *de ce Plan, & de la ſuperficie cylindrique, ſera une ellipſe.*

DE'MONSTRATION.

AYANT diviſé *Dd* qui eſt la commune Section des Plans *AB*, & *dIDHd* par milieu en *K*, & pris librement un point *L* ſur la même *Dd*; ſi l'on ſuppoſe la ſuperficie cylindrique coupée par deux Plans paralleles entr'eux, & perpendiculaires à l'axe du cylindre, qui paſſent par les points *K* & *L*, les communes Sections *SVTR*, *MHNI* de ces deux Plans, avec la ſuperficie cylindrique, ſeront deux cercles dont les communes Sections *VKR*, *HLI*, avec le Plan *dIDHd*, ſeront perpendiculaires à *Dd*, à *ST*, & à *MN*; & dont les communes Sections *ST*, *MN*, avec le Plan *AB*, ſont les diametres; d'où il ſuit que $KV = KR$, & $LH = LI$, & que le point *K* qui diviſe *Dd* par le milieu; diviſe de même *ST*; & partant le point *K* eſt le centre du cercle *SVT*.

Ayant donc nommé les données *KD*, ou *Kd*, a; *SK*, ou *KT*, ou *KR*, ou *KV*, b; & les indéterminées *KL*, x; *LI*, y; *DL* ſera $a+x$, & *Ld* $a-x$.

Les triangles ſemblables *DKS*, *DLM* donnent *DK* $(a) . KS (b) :: DL (a+x) . LM = \frac{ab+bx}{a}$. Pareillement les triangles ſemblables *dKT*, *dLN* donnent *dK* $(a) . KT (b) :: dL (a-x) . LN = \frac{ab-bx}{a}$. Mais à

cause du cercle MIN, $ML \times LN = LI^2$, c'est-à-dire en termes Algebriques $\frac{aabb - bbxx}{aa} = yy$, ou $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$; & comme cette équation est la même que la précedente (n°. 10). Il suit que la courbe $dIDHd$, est une ellipse. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION VI.

Theorême.

18. S*I les bases des superficies coniques; & par consequent les courbes* IMH, *qui sont les communes Sections des mêmes superficies coniques par des Plans paralleles aux bases, ont cette proprieté qu'une puissance quelconque de leurs appliquées* LH, *ou* LI, *soit égale au produit de deux puissances de* LM, & LN; *telles que la somme de leurs exposans, soit* = *à l'exposant de la puissance de* LI, *c'est-à-dire par exemple, que* $LI^{p+q} = LM^p \times LN^q$, ou $LM^q \times LN^p$. *Je dis que les Sections coniques* IDH, *telles que nous les avons définies (n°. 5, 6, & 7.) sont de même genre que les courbes* IMH. Fig. 48, 49, 50.

En donnant aux lignes les mêmes noms qu'on leur a données (n°. 8, 10, & 11); & faisant $p + q = m$, p & q, signifient tels nombres qu'on voudra entiers ou rompus.

Soit premierement le Plan coupant EDF parallele à AC Il faut prouver que la courbe IDH, est une parabole du même genre que la courbe IMH.

DE'MONSTRATION.

L'ON trouvera, comme on a fait (n°. 8.) $LM = \frac{cx}{b}$; donc $LM^p = \frac{c^p x^p}{b^p}$. $LN = DO$ a été nommée c; donc $LN^q = c^q$: mais par la proprieté de la courbe IMH, $LM^p \times LN^q = LI^m$, c'est-à-dire, en termes Algebriques,

$\frac{c^q c^p x^p}{b^p} = y^m$, qui eſt une équation à une parabole du même genre que la courbe *IMH*, puiſque l'inconnue y, dont l'expoſant eſt plus grand que celui de x, eſt élevée à la même puiſſance que $LI = y$, dans l'équation à la courbe *IMH*. *C. Q. F. D.*

Ce ſera la même Démonſtration pour l'ellipſe & pour l'hyperbole, & pour la Section du cylindre.

Mr De la Hire qui eſt le ſeul que je ſçache qui a parlé de ces courbes, les appelle cercles du ſecond, troiſiéme, quatriéme, cinquiéme genre, *&c.*

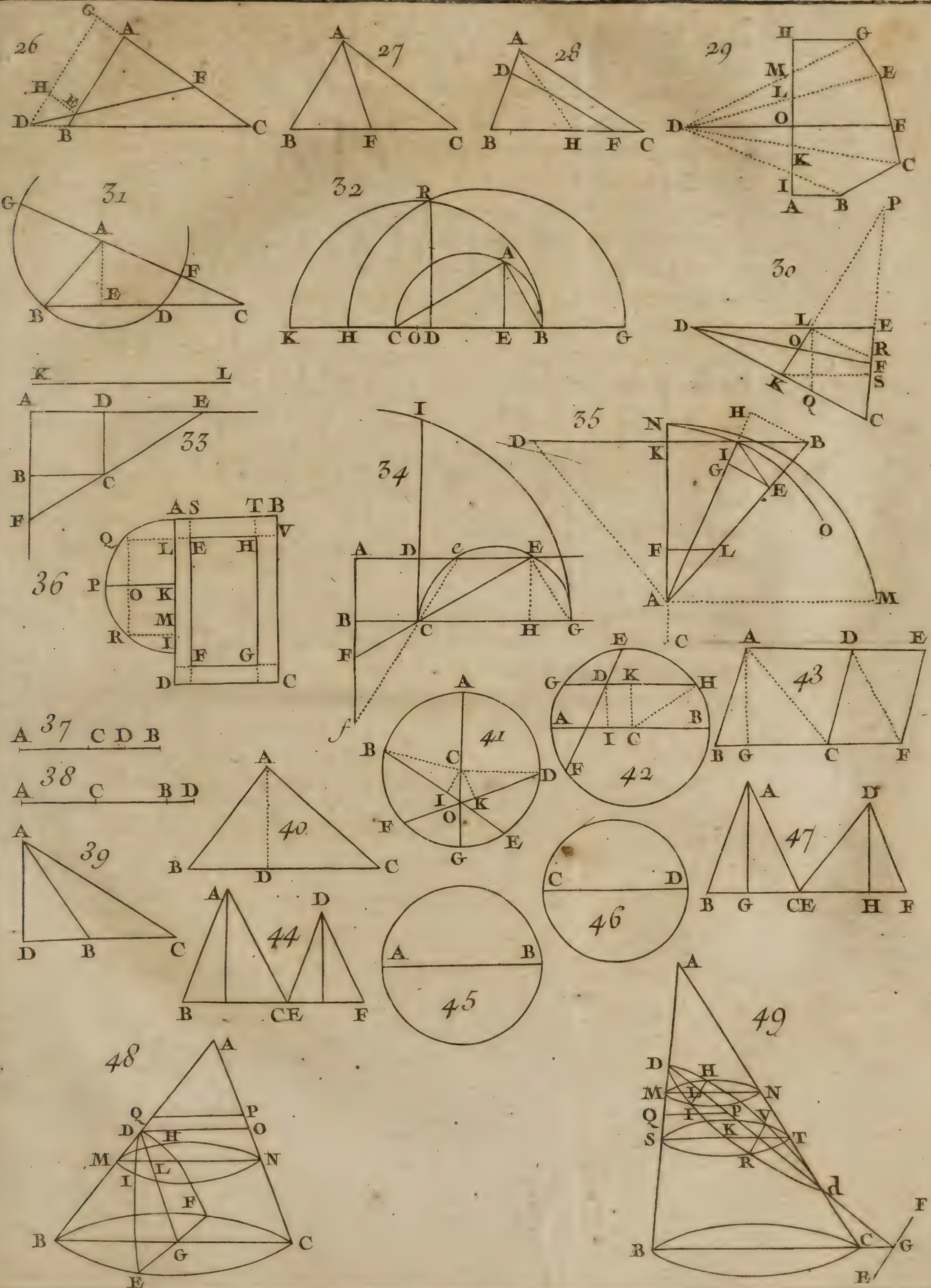
Si dans l'équation précedente $LI^m = LM^p \times LN^q$, on fait $p = 2$, & $q = 1$, ou $p = 1$, & $q = 2$; $m = p + q$ ſera $= 3$, & l'équation deviendra $LI^3 = LM^2 \times LN$, ou $LI^3 = LM \times LN^2$, & la courbe *IMH*, ſera un cercle du ſecond genre.

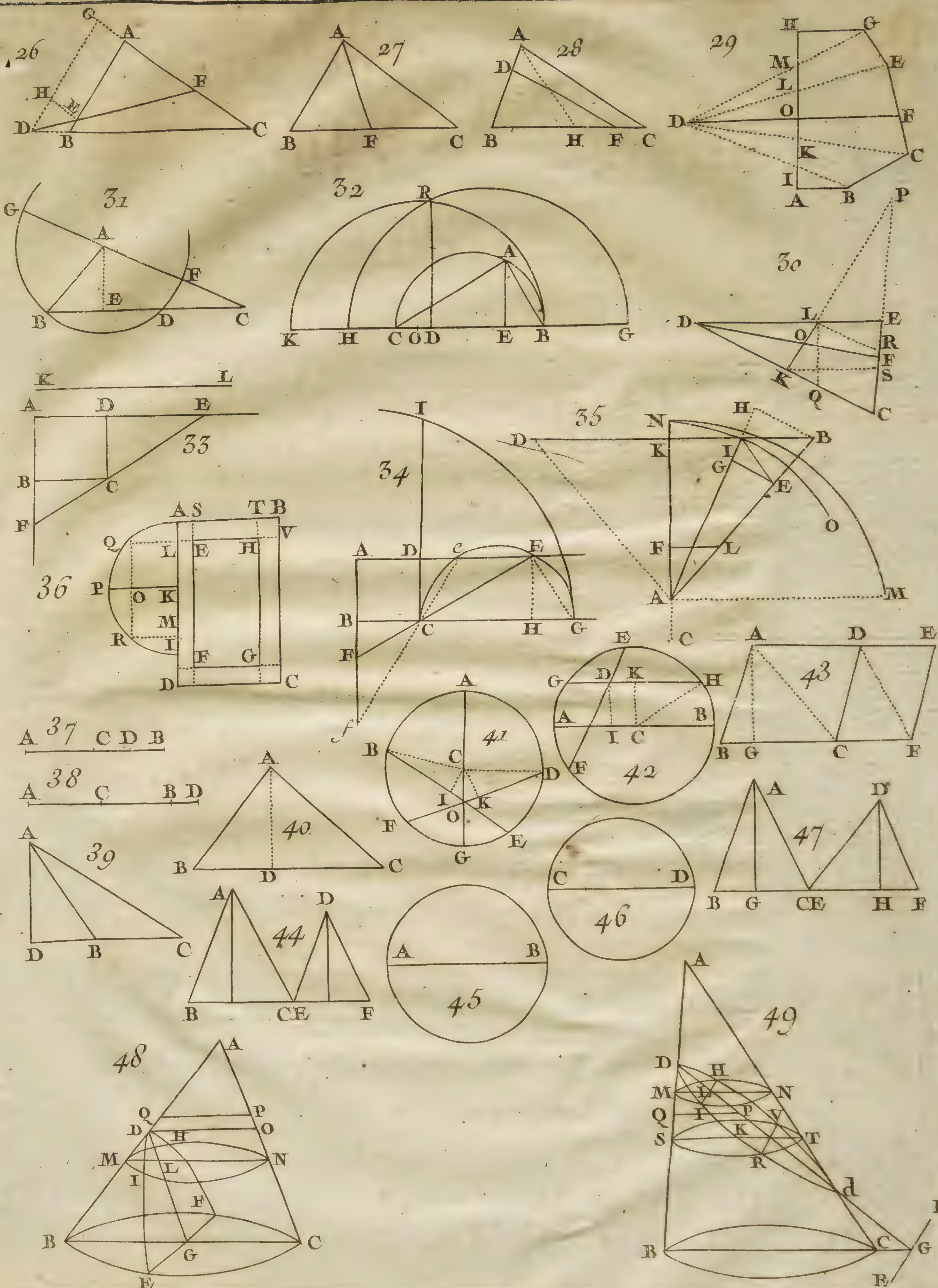
Dans la même ſuppoſition de $p = 2$, & $q = 1$, l'équation $\frac{c^q c^p x^p}{b^p} = y^m$, devient $\frac{c^3 xx}{bb} = y^3$, qui eſt du même degré que celle de la courbe *IMH*, & qui appartient par conſequent à une parabole du ſecond genre, qu'on appelle *ſeconde parabole cubique.*

Si $p = 1$, & $q = 2$, l'équation $\frac{c^q c^p x^p}{b^p} = y^m$ deviendra $\frac{c^3 x}{b} = y^3$, qui ſe rapporte encore à une parabole du ſecond genre, qu'on appelle *premiere parabole cubique.* Il en eſt ainſi des autres.

REMARQUE.

19. ON détermineroit avec la même facilité la nature, & le genre de la courbe *IDH*, dans le Cone, & dans le Cylindre; ſi la courbe *IMH*, dont le Plan eſt parallele à la baſe *BC*, étoit une Section conique d'un genre quelconque. Et en general, la nature de la cour-




26
G A H E F D B C
27
A B F C
28
A D B H F C
29
H G M E L O F D K C I A B
31
G A F E B D C
32
R A K H C O D E B G
30
P D L E O R F S K Q C
K L
A D E
33
B C F
34
I A D c E B C H G F f
35
D N H B K I G E O F L A M C
36
A S T B V Q L E H P O K M R I F G D C
37
A C D B
38
A C B D
39
A D B C
40
A B D C
41
A B C D I K O F E G
42
E G D K H A B I C F
43
A D E B G C F
44
A D B CE F
45
A B
46
C D
47
A D B G CE H F
48
A Q P D O H M N L I F B C G E
49
A D H M L N Q I P V S K T R d F B C G E

be *IMH* étant donnée, on déterminera aiſément la nature de la courbe *IDH*; & au contraire. De ſorte qu'il n'y a point de courbe que l'on ne puiſſe conſiderer comme la Section d'une eſpece de Cone ou de Cylindre, & déterminer par ſon moyen la nature de la courbe *IMH* parallele à la baſe de ce Cone, & de ce Cylindre; ou bien qu'il n'y a point de courbe, que l'on ne puiſſe ſuppoſer être la baſe d'un Cone, ou d'un Cylindre, & déterminer par ſon moyen la nature des Sections de ce Cone, & de ce Cylindre. De maniere qu'on peut avoir non ſeulement une infinité de genres de Sections coniques, mais encore une infinité d'eſpeces dans chaque genre, excepté dans le premier, qui ne renferme que quatre courbes, comme on a déja remarqué.

On s'eſt contenté de démontrer dans le Cone, la principale proprieté des Sections coniques du premier genre, attendu qu'on en va démontrer dans les trois Sections ſuivantes, toutes les proprietez neceſſaires pour l'Application de l'Algebre à la Geometrie, en les décrivant par des points trouvez ſur des Plans. On ne les a même conſiderées dans le Cone que parcequ'elles y ont pris leur origine, & leur nom, pour faire voir que celles qu'on décrit ſur des Plans, ſont préciſément les mêmes que celles qu'on coupe dans le Cone; & qu'on peut par conſequent leur donner les mêmes noms.



SECTION V.

Où l'on démontre les principales proprietez de la Parabole décrite par des points trouvez sur un Plan.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 53. X. UNE *ligne droite* DFP, *&* *deux points fixes* D, *&* F *sur cette ligne, étant donnez de position sur un Plan. Je dis que si l'on mene librement la ligne* MPm, *perpendiculaire à* DFP; *&* *si du centre* F, *&* *du rayon* DP, *l'on décrit un cercle; il coupera la perpendiculaire* MPm, *en deux points* M *&* m, *qui seront à une Parabole.*

DE'MONSTRATION.

IL est clair qu'ayant divisé DF par le milieu en A, le cercle décrit du centre F, & du rayon DA, touchera en A, la perpendiculaire menée par le point A, & ne rencontrera point celles qui seroient menées au-dessus de A par raport à F: mais qu'il coupera en deux points toutes celles qui seront menées au-dessous de A, comme MPm; d'où il suit que la courbe qui passe par les points M, m trouvez, comme on vient de dire, passe aussi par le point A.

Ayant mené FM, & nommé les données, ou constantes AF, ou AD, a; & les indéterminées, ou variables AP, x; PM, y; FP sera $x - a$, ou $a - x$; & FM, ou DP, $x + a$.

Le triangle rectangle FPM donne $xx - 2ax + aa + yy = aa + 2ax + xx$, qui se réduit à $4ax = yy$, ou (en faisant $4a = p$) $px = yy$. Or comme cette équation est la même que celle de l'article 9. n°. 8; il suit que la courbe MAm,

MAm, eſt une parabole, dont le parametre eſt $p = 4a = 4AF = 2FD$. *C. Q. F. D.*

L'équation $px = yy$ peut être réſolue par le cercle. Car ayant mené une ligne *AB* indéfinie, ſi vous prenez $AD = p$; & que d'un point quelconque *C* pris ſur *AB*, & du rayon *CA*, vous décriviez le cercle *AEG*, qu'enfin du point *D*, vous meniez la perpendiculaire *DE*, cette ligne $DE = y$ & $DB = x$. Car par la proprieté du cercle $AD \times DB = \overline{DE}^2$. Or $AD = p$. Donc $AD \times DB = px$, & $\overline{ED}^2 = yy$. C'eſt-à-dire que $DB = x$ & $ED = y$. Mais comme le rayon *CA* du cercle peut augmenter à l'infini, *x* & *y* augmenteront à l'infini; & *x* augmentant, *y* augmentera. FIG. 54.

COROLLAIRE I.

1. IL eſt évident que $2FD . PM :: PM . AP$: car l'équation $4ax = yy$, étant réduite en analogie, donne $4a . y :: y . x$. FIG. 53.

COROLLAIRE II.

2. IL eſt clair que ſi l'on mene par *D* la ligne *ED* parallele à *PM*, & par les points *M*, *m* qui ſont communs à la parabole & à la perpendiculaire *MPm*, les droites *ME*, *me* paralleles à *PD*, elles ſeront égales entr'elles, à *PD*, & à *FM*, & que les parties *PM*, *Pm* de la perpendiculaire *MPm*, ſeront auſſi égales. FIG. 53.

DÉFINITIONS.

3. LA ligne *AP* eſt nommée l'*axe* de la parabole; *A*, le *ſommet* de l'axe, ou de la parabole; *PM*, ou *Pm* l'*appliquée* ou l'*ordonnée*; *AP*, l'*abciſſe* ou la *coupée*; *F*, le *foyer*; *D*, le *point generateur*; *Ee*, la *ligne generatrice*; *AB*, quadruple de *AF*, ou de *AD*, le *parametre* de l'axe. FIG. 53.

COROLLAIRE III.

4. L'ON voit par l'équation précedente $4ax = yy$ que x croiſſant y croît auſſi ; & qu'ainſi la parabole s'eloigne toujours de plus en plus de ſon axe à meſure que le point P s'éloigne du ſommet A, & que cela peut aller à l'infini : car il n'y a rien dans l'équation qui empêche d'augmenter x à l'infini.

COROLLAIRE IV.

5. D'OU il ſuit que les lignes comme EM meneés paralleles à AP paſſent au-dedans de la parabole étant prolongées vers R, & ne la rencontrent qu'en un ſeul point M.

COROLLAIRE V.

6. SI dans l'équation $4ax = yy$, l'on fait $x = a$, le point P tombera en F, & l'on aura $4aa = yy$; donc $2a = y$; c'eſt-à-dire que l'appliquée FO qui part du foyer eſt égale à la moitié du parametre ; & ſi l'on fait $x = 4a$, l'on aura $16aa = yy$, ou $4a = y$, c'eſt-à-dire que AP, & PM ſeront chacune égale au parametre.

COROLLAIRE VI.

7. IL eſt manifeſte que la quantité conſtante qui accompagne l'inconnue ou l'indéterminée qui n'a qu'une dimenſion dans un des membres de l'équation, eſt l'expreſſion du parametre de l'axe de la parabole, lorſque le quarré de l'autre indéterminée eſt ſeul dans l'autre membre : par exemple dans cette équation $\frac{aax}{c} = yy$, $\frac{aa}{c}$ eſt l'expreſſion du parametre de l'axe de la parabole dont l'abciſſe eſt x ; & l'appliquée y.

PROPOSITION II.

Theorême.

8. *LES quarrez des ordonnées* PM, QN *sont entr'eux comme les abcisses correspondantes* AP, AQ. FIG. 53.

Ayant nommé comme dans la Proposition précedente AB, $4a$; AP, x; PM, y; & AQ, s; QN z.

Il faut prouver que $PM^2 (yy) . QN^2 (zz) :: AP (x) . AQ (s)$.

DE'MONSTRATION.

L'On a par la Proposition précedente $4ax = yy$, & $4as = zz$; donc $yy . zz :: 4ax . 4as :: x . s$. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION III.

Theorême.

9. *LES mêmes choses étant toujours supposées. Je dis que, si d'un point quelconque* m *pris sur la parabole, on mene* me *parallele à* PA, *qui rencontrera la generatrice en* e, *& par le sommet* A, *la droite* AC *parallele à* De *qui rencontrera* em *en* C; *le cercle* mIe *décrit sur le diametre* me *coupera* AC *par le milieu en* I.

Ayant nommé la donnée AD, ou eC, a; & les indéterminées AP, ou Cm, x; Pm, ou AC, y; & CI, s.

Il faut prouver que $CI\ (s) = \frac{1}{2} AC\ \left(\frac{1}{2} y\right)$.

DE'MONSTRATION.

L'ON a par la premiere proposition $4ax = yy$, & par la proprieté du cercle $ax\ (eC \times Cm) = ss\ (CI^2)$, ou $4ax = 4ss$; donc $y = 2s$, ou $\frac{1}{2} y = s$. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION IV.

Theorême.

FIG. 53. 10. *En supposant encore les mêmes choses, si l'on prend* AG, *menée par le sommet* A *parallele aux appliquées* PM, *pour l'axe de la parabole*, & GM *parallele à* AP, *pour l'appliquée, en nommant* AG *ou* PM, x; GM, *ou* AP, y; & *le parametre* 4AF, 4a. *Je dis que* $4AF \times GM = AG^2$.

DE'MONSTRATION.

L'On a par la premiere Proposition $4ay = xx$. *C. Q. F. D.*

L'on n'a mis ici cette Proposition que pour faire voir qu'il est indifferent de prendre celui qu'on voudra des deux axes conjuguez pour l'abcisse, & l'autre pour l'appliquée; ce qui convient à toutes les courbes Geometriques, où les deux indéterminées forment toujours un parallelogramme que nous avons nommé (art. 3. nº. 16.) le parallelogramme des coordonnées.

PROPOSITION V.

Problême.

11. *Une équation à la parabole*, $bx = yy$, *étant donnée, décrire la parabole, lorsque les coordonnées sont perpendiculaires l'une à l'autre.*

b, étant (nº. 7.) le parametre; *x*, l'abcisse; & *y*, l'appliquée de la parabole qu'il faut décrire, comme il est démontré dans la premiere Proposition.

Soit *A* le commencement de *x*, qui va vers *P*; & de *y* qui va vers *B*, ayant pris $AB = b$, & prolongé *AP* du côté de *A*, on fera *AF*, & *AD* chacune égale à $\frac{1}{4}b$

$= \frac{1}{4}$ *AB*, & l'on décrira une parabole *AM* par la premiere Propoſition qui ſatisfera au Problême, & dont *A* ſera le ſommet, *F* le foyer, & *D* le point generateur.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené une ordonnée quelconque *PM*; *AF* étant, $\frac{1}{4} b$; *AP*, x; *PM*, y; *FP*, ſera $x - \frac{1}{4} b$, ou $\frac{1}{4} b - x$; & $FM = PD$ (n°. 2.), $x + \frac{1}{4} b$. Et le triangle rectangle *FPM* donnera $xx + \frac{1}{2} bx + \frac{1}{16} bb = xx - \frac{1}{2} bx + \frac{1}{16} bb + yy$ qui ſe réduit à $bx = yy$. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

12. SI l'on avoit nommé (Prop. 1.) *DP*, x; & *DF*, a; l'on auroit trouvé $2ax - aa = yy$; & ſi l'on avoit nommé *FP*, x; & *DF*, a; l'on auroit trouvé $2ax + aa = yy$. Ce qui fait voir que lorſqu'une équation à la parabole a plus de deux termes, l'origine des inconnues n'eſt point au ſommet de l'axe.

PROPOSITION VI.

Problême.

XI. *UNE parabole* AM, *dont l'axe eſt* AP, *le ſommet* A, *le foyer* F, *le point generateur* D, *& la ligne generatrice* EDH, *étant donnée. On propoſe de mener d'un point quelconque* M, *donné ſur la parabole, la tangente* MT. FIG. 55.

Ayant mené par le point donné *M* la droite *MH* parallele à l'axe *AP*, & joint les points *F*, *H*; la ligne *MOT* menée du point *M* par le point *O* milieu de *FH*, ſera la tangente cherchée.

DE'MONSTRATION.

PUISQUE (Art. 10. n°. 2.) $MF = MH$, & que FH eſt coupée par le milieu en O; la ligne MO eſt perpendiculaire à FH; c'eſt pourquoi ſi l'on prend ſur MO prolongée ou non prolongée un point quelconque, d'où l'on mene GF, & GH, & GI parallele à AP, le triangle FGH ſera iſoſcele : mais à cauſe de l'angle droit GIH, GH ſurpaſſe GI; c'eſt pourquoi GF ſurpaſſe auſſi GI; & par conſequent le point G eſt hors de la parabole, & partant MO ne la rencontre qu'au point M, où elle la touche. *C. Q. F. D.*

On peut ajouter pour confirmer cette Démonſtration, que ſi d'un point quelconque R pris au dedans de la parabole, on mene RF du point R au foyer, & RH parallele à AP qui rencontre la parabole en M, & la generatrice en H, la ligne RH ſurpaſſera toujours RF : car ayant mené MF, elle ſera (Art. 10. n°. 2.) $= MH$: mais $RM + MF$ ſurpaſſent RF; & partant RH ſurpaſſe RF; c'eſt pourquoi puiſque GF ſurpaſſe GI, le point G eſt hors de la parabole. On ne peut pas dire que le point G ſoit ſur la parabole : car GF ($= GH$) ſeroit $= GI$.

COROLLAIRE I.

1. IL eſt clair que MO prolongée rencontre l'axe AP auſſi prolongé en T : car l'angle FOT eſt droit, & l'angle OFT aigu.

COROLLAIRE II.

2. SI l'on prolonge HM vers R, & la tangente MO du côté de M vers S; l'angle RMS ſera égal à l'angle $OMF = OMH$.

COROLLAIRE III.

3. D'OÙ il ſuit par les loix de la *Catoptrique* que ſi le foyer F étoit un point lumineux, les rayons reflêchis à la rencontre de la parabole ſeroient paralleles à l'axe;

ou ce qui eſt la même choſe, les rayons paralleles à l'axe venant d'un point lumineux infiniment éloigné, ſe reflêchiſſant à la rencontre de la parabole, leurs reflêchis paſſeroient tous au foyer *F*.

PROPOSITION VII.

Theorême.

4. *EN ſuppoſant la même choſe que dans la Propoſition précedente. Je dis que, ſi l'on mene par le point touchant* M, *la droite* MQ *parallele à* HF, *qui rencontrera l'axe* AP *en* Q, *la partie de l'axe* PQ, *compriſe entre le point* Q, *& l'ordonnée* PM *qui part du point* M, *ſera égale à la moitié du parametre de l'axe de la parabole.*

DE'MONSTRATION.

A Cauſe des paralleles *HF*, *MQ*, & *HM*, *FQ*, les triangles *MPQ*, *HDF* ſont ſemblables & égaux; c'eſt pourquoi $PQ = DF =$ (Prop. 1.) à la moitié du parametre de l'axe.

DE'FINITION.

5 LA ligne *PT* eſt nommée *ſoutangente*, *MQ perpendiculaire*; & *PQ*, *ſouperpendiculaire*, ou *ſounormale*.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

6. *LES choſes demeurant dans le même état que dans la Propoſition précedente. Je dis que la ſoutangente* PT *eſt double de l'abciſſe* AP, *compriſe entre le ſommet* A *& l'ordonnée* PM *qui part du point touchant* M.

Ayant nommé comme dans la premiere Propoſition les données *AF*, ou *AD*, a; *PQ* (n°. 5.) $2a$; & les variables *AP*, x; *PM*, y; *PT*, t.

Il faut prouver que $t = 2x$.

DE'MONSTRATION.

L'ANGLE FOT étant (Prop. 6.) droit, l'angle QMT (n°. 4.) sera aussi droit ; c'est pourquoi $2a$ (QP) . y (PM) :: y . t (PT) ; donc $2at = yy$: Mais (Prop. 1.) $4ax = yy$; donc $2at = 4ax$; & partant $t = 2x$. *C. Q. F. D.*

7. Cette Proposition fournit un moyen aisé de mener une tangente à la parabole ; car si d'un point quelconque M, on mene l'ordonnée MP perpendiculaire à l'axe AP ; ayant fait $AT = AP$, la ligne MT sera la tangente cherchée.

PROPOSITION IX.

Theorême.

FIG. 56. 8. UNE *parabole* AM *dont* AP *est l'axe* ; A *le sommet* ; F, *le foyer* ; D, *le point generateur* ; DE, *la ligne generatrice. Si par un point quelconque* M *pris sur la parabole, on mene* (n°. 7.) *la tangente* MT, *& par quelqu'autre point* L, *la ligne* LG *parallele à la tangente* MT. *Je dis que la ligne* MR *menée par le point touchant* M *parallele à l'axe* AP, *coupera* GL *par le milieu en* O.

Ayant mené par les points L, M, O, & G. Les lignes BLI qui rencontrent MR prolongée en I, MP, OC, & GRS perpendiculaires à l'axe AP, & nommé AF, ou AD, a ; le parametre de l'axe sera (Art. 10.) $4a = 4AF$; AP, x ; PM ; ou BI, ou SR, y ; AC, m ; BC, ou IO, f ; CS, ou OR, z ; AB sera, $m - f$; AS, $m + z$; CP, ou OM, $m - x$; & PT (n°. 6.), $2x$.

Il faut prouver que $OG = OL$, ou ce qui revient au même $OR = OI$, ou $f = z$.

DE'MONSTRATION.

LES triangles semblables (Const.) TPM, ORG, OIL, donnent les deux Analogies suivantes.

TP

$TP\,(2x).\,PM\,(y)::OR\,(z).\,RG=\frac{yz}{2x}$, &

$TP\,(2x).\,PM\,(y)::OI\,(s).\,IL=\frac{ys}{2x}$; donc $SG=y+\frac{yz}{2x}$, & $BL=y-\frac{ys}{2x}$: mais (Art. 10. n°. 8.)

$x\,(AP).\,m+z\,(AS)::yy\,(PM^2).\,yy+\frac{2yyz}{2x}+\frac{yyzz}{4xx}$ (SG^2). & $x\,(AP).\,m-s\,(AB)::yy\,(PM^2).\,yy-\frac{2yys}{2x}+\frac{yyss}{4xx}\,(BL^2)$, d'où l'on tire ces deux équations

$A.\ myy+yyz=xyy+\frac{2xyyz}{2x}+\frac{xyyzz}{4xx}$, &

$B.\ myy-yys=xyy-\frac{2xyys}{2x}+\frac{xyyss}{4xx}$, & ôtant le premier membre de la seconde équation *B* du premier membre de la premiere *A*, & le second de la seconde du second de la premiere, l'on a $yyz+yys=\frac{2xyyz+2xyys}{2x}+\frac{xyyzz-xyyss}{4xx}$, d'où l'on tire $z=s$, ou $OR=OI$; donc $OL=OG$. *C. Q. F. D.*

Il peut arriver differens cas: car le point *O* s'éloignant de *M*, le point *L* tombera en *A*, ou de l'autre côté de *A* par raport à *M*: mais on le prouvera toujours de la même maniere que $z=s$, $OG=OL$; c'est pourquoi la Proposition est generalement vraye.

DE'FINITIONS.

9. LA ligne *MR* parallele à l'axe *AP* est appellée *diametre*, parcequ'elle coupe toutes les *GL* par le milieu en *O*; le point *M*, le *sommet* du diametre *MR*; *MO*, FIG. 56.

M

l'*abscisse*, ou *coupée*; *OL*, ou *OG*, l'*ordonnée*, ou l'*appliquée* à ce diametre.

PROPOSITION X.
Theorême.

10. EN *supposant les mêmes choses que dans la Proposition précedente. Je dis que le quarré d'une ordonnée quelconque* OL, *ou* OG *au diametre* MR, *est égal au rectangle de l'abscisse* MO *par* 4MF, *ou* (*Art.* 10. n°. 2.), *ayant prolongé* OM *en* H, *par* 4MH.

Ayant nommé l'abscisse *MO*, t; l'ordonnée *OL*, ou *OG*, u; *MF*, ou *MH*, b; & les autres lignes comme dans la Proposition précedente.

Il faut prouver que $4bt = uu$, ($4MF \times MO = OG^2$).

DE'MONSTRATION.

SI l'on ajoute les deux premiers & les deux seconds membres des deux équations *A* & B de la Proposition précedente, après avoir mis z en la place de s; puisque (Prop. préced.) $z = s$; l'on aura $2myy = 2xyy + \frac{2xyyzz}{4xx}$, ou $zz = 4mx - 4xx$, ou $zz = 4tx$, en mettant t pour $m - x = PC = MO$: mais le triangle rectangle *ORG*, ou *OIL* donne zz (OR^2) $+ \frac{yyzz}{4xx}$ (RG^2. Prop. préced.) $= uu$ (OG^2, ou OL^2), qui devient $4tx + 4at = uu$ en mettant pour zz sa valeur $4tx$, & pour yy sa valeur (Prop. 1.) $4ax$: mais $x + a = PD = MF = MH = b$; donc en substituant b en la place de $x + a$ dans l'équation précedente, elle deviendra $4bt = uu$, ou $4MF \times MO = OG^2$. *C. Q. F. D.*

DE'FINITIONS.

11. LA ligne égale à $4b = 4MF = 4MH$ est nommée le *parametre* du diametre *MO*.

PROPOSITION XI.

Theorême.

12. *UNE équation à la parabole* (ax = yy) *dont les coordonnées* x & y *ne ſont point perpendiculaires, étant donnée, décrire la parabole.*

Soit *M* le ſommet du diametre *MO*, dont le parametre eſt *a*, & l'origine des variables *x*, qui va vers *O*, & *y* qui va vers *K* en faiſant avec *MO* l'angle oblique *OMK*. Il faut décrire par *M* la parabole *LMG* dont l'équation eſt $ax = yy$. Fig. 57.

Ayant prolongé *OM* & pris $MH = \frac{1}{4} a =$ (Prop. préced.) au quart du parametre du diametre *MO*, on menera par *H* la droite *HE* perpendiculaire à *HO*, qui ſera (Prop. préced.) la ligne generatrice ; & ayant fait l'angle *KMF* = l'angle *KMH*, pris *MF* = *MH* & mené par *F* la ligne *FD* parallele à *MO* qui coupera la generatrice *HE* en *D*. Par la Propoſition précedente, & par la ſixiéme, *F* ſera le foyer ; *FD*, l'axe ; *D* le point generateur, & *A* milieu de *FD* le ſommet de l'axe de la parabole qu'il faut décrire. On la décrira par la premiere Propoſition.

DE'MONSTRATION.

ELLE eſt claire par la Propoſition précedente, & par la ſixiême.



SECTION VI.

Où l'on démontre les principales propriete de l'Ellipse décrite par des points trouvez sur un Plan.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 58. XII. UNE *ligne droite* AB, *divisée par le milieu en* C, *& deux points fixes* F, G *également distans du milieu* C, *ou des extrémitez* A *&* B, *étant donnée de grandeur & de position ; si l'on prend entre* F *&* G *un point quelconque* H, *& que du centre* F *& du rayon* AH ; *du centre* G *& du rayon* BH, *l'on décrive deux cercles ; ces deux cercles se couperont en deux points* M, m *de part & d'autre de la ligne* AB ; *puisque leurs demi diametres surpassent* FH + HG. *Et je dis que les points* M *&* m, *& tous ceux qui seront trouvez de la même maniere, en prenant d'autres points* H, *seront à une Ellipse dont* C *est le centre*, AB *le grand axe*, DE *l'axe conjugué à l'axe* AB, *qui est double de la moyenne proportionnelle entre* AF *&* FB, *ou* AG *&* GB.

DE'MONSTRATION.

D'UN des points M, trouvez comme on vient de dire, ayant abbaissé la perpendiculaire MP, mené FM & GM, & nommé les données AC, ou CB, a; FC, ou CG, c; & les indéterminées CP, x; PM, y; AP sera, $a-x$; $PB, a+x$; FP, $c-x$ ou, $x-c$; & $PG, c+x$.

Il est clair par la description que $FM + MG = AB = 2a$; puisque $FM = AH$, & $MG = HB$; nommant donc la difference de FM, & MG, $2s$; FM sera $a-s$ & MG, $a+s$. Cela posé.

Les triangles rectangles FPM, GPM donneront, $cc - 2cx + xx + yy = aa - 2af + ff$, & $cc + 2cx + xx + yy = aa + 2af + ff$, & en ôtant la premiere de la seconde, le premier membre du premier & le second du second, l'on aura $4cx = 4af$, d'où l'on tire $f = \frac{cx}{a}$, & mettant cette valeur de f, & celle de son quarré ff dans l'une des deux premieres équations, l'on aura $cc - 2cx + xx + yy = aa - 2cx + \frac{ccxx}{aa}$, d'où l'on tire en réduisant, transposant, & divisant par $aa - cc$, $aa - xx = \frac{aayy}{aa - cc}$.

Mais lorsque le point P tombe en C, PM (y) devient CD, & (x) devient nulle, ou $= 0$; c'est pourquoi en effaçant le terme xx, l'on a $aa = \frac{aayy}{aa - cc}$, ou $aa - cc = yy = CD^2$, & partant $y = \pm CD$: nommant donc CD, b; l'on a, $aa - cc = bb$; d'où l'on tire $a - c$ (AF). b (CD) :: b (CD). $a + c$ (FB). Qui est une des choses qu'il faloit démontrer. Or mettant bb dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{aa - cc}$ en la place de $aa - cc$ l'on a, $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$. Et comme cette équation est la même que celle qu'on a trouvée (Art. 9. n°. 10.) il suit que la courbe $ADBE$ est une Ellipse. Ce qui est une des autres choses proposées.

Si dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, l'on fait $y = 0$, l'on aura $xx = aa$; donc $x = \pm a$, ce qui fait voir que l'Ellipse passe par les points A & B. Et en faisant $x = 0$ l'on a trouvé $y = \pm CD$ qui montre que l'Ellipse AM passe aussi par les points D & E, en faisant $CE = CD$; c'est

pourquoi (Art. 9. n°. 6.) AB, eſt le diametre principal de l'Ellipſe; DE ſon axe conjugé, & C le centre. Ce qu'il faloit enfin démontrer.

On peut réſoudre cette équation $aa - xx = \frac{aayy}{aa - cc}$, par le cercle. Mais il faut la changer en celle-ci $aa - cc = \frac{aayy}{aa - xx}$, puis faire cette analogie, $B. a + x . y :: y . \frac{yy}{a + x} = z$, & l'on aura $aa - cc = \frac{aaz}{a - c}$. On fera enſuite cette autre analogie, $D. a - x . a :: a . \frac{aa}{a - x} = u$, & l'on aura $aa - cc = zu$.

FIG. 59. Pour trouver toutes les inconnues, u, x, y, z, 1°. d'un rayon qui ne ſoit pas moindre que la moitié d'$AB = 2a$ décrivez le cercle ABG, inſcrivez-y la corde $AB = 2a$, ſur laquelle vous prendrez $AD = a + c$, & $DB = a - c$ par le point D menez une autre corde EG. Et parce que dans l'analogie D, a eſt plus petit que u, il faut prendre $DG = u$ plus grand que $\frac{1}{2}$ AB.

A préſent pour avoir x, à cauſe de l'analogie D, on aura $au - xu = aa$, ou, $au - aa = ux$; ainſi nous aurons cette analogie $E. u . a :: a . x$. On trouvera x en faiſant

FIG. 60. l'angle CAF, & prenant $AF = u$, $BF = u - a$, $AC = a$, les paralleles CF & BD menées, donnent $DC = x$.

FIG. 61. Enfin pour avoir y, menez, à cauſe de l'analogie B, la ligne AB, ſur laquelle vous prendrez $AD = a + x$ ($AK + DC$), $DB = z$. De C milieu de AE, & de l'intervalle AC ou CB, décrivez le demi cercle ALB, la perpendiculaire $DL = y$.

DÉFINITIONS.

FIG. 58. 1. LES points F & G ſont nommez les *foyers* de l'Ellipſe; CP, l'*abciſſe*, ou *coupée*, & PM, ou Pm l'*ordonnée*, ou l'*appliquée* à l'axe AB.

COROLLAIRE I.

2. IL eſt clair que les lignes FM, GM menées des foyers à la circonference de l'Ellipſe ſont, par la deſcription, enſemble égales à l'axe AB, & que $PM = Pm$.

COROLLAIRE II.

3. IL eſt auſſi évident que le rectangle des deux parties AF, FB ou AG, GB de l'axe AB faites par un des foyers F, ou G, eſt égal au quarré du demi axe conjugué DC: car dans la Démonſtration précedente l'on a trouvé $aa - cc = CD^2$. Or $aa - cc = a + c \times a - c$, $AF \times FB = CD^2$.

COROLLAIRE III.

4. ON voit par les termes de l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, & par les ſignes + & — qui les précedent que x croiſſant, y diminue : car plus x devient grande, plus $aa - xx$ diminue, & par conſequent auſſi yy; puiſque les quantitez conſtantes aa, & bb demeurent toujours de même grandeur; ce qui fait voir que les points M & m de l'Ellipſe, s'approchent d'autant plus de l'axe AB, que le point P s'éloigne de C. On voit auſſi que l'on ne peut augmenter x que juſqu'à ce qu'elle devienne $= a$; auquel cas $aa - xx$ devient $= aa - aa = 0$; & par conſequent auſſi $y = 0$, ce qui fait voir que les points M & m ſe confondent alors avec les points A & B, & que l'Ellipſe coupe l'axe en ces points, comme on a déja remarqué.

COROLLAIRE IV.

5. L'EQUATION à l'Ellipſe $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ étant réduite en analogie donne $aa - xx$ ($AP \times PB$) . yy (PM^2) :: aa (AC^2) . bb (CD^2) :: $4aa$ (AB^2) $4bb$ (DE^2), c'eſt-à-dire que le rectangle des deux parties AP, PB de

l'axe *AB* faites par l'appliquée *PM* eſt au quarré de l'appliquée *PM* : comme le quarré de l'axe *AB* eſt au quarré de l'axe conjugué *DE*.

COROLLAIRE V.

6. SI l'on fait $AB\ (2a) . DE\ (2b) :: DE\ (2b) . \frac{2bb}{a}$, la ligne $= \frac{2bb}{a}$ que je nomme p. p ſera (Art. 9. n°. 13,) le parametre de l'axe *AB*. Or puiſque $a . b :: b . \frac{1}{2} p$, l'on a auſſi $a . \frac{1}{2} p :: aa . bb$; donc $abb = \frac{1}{2} aap$; donc $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$; C'eſt pourquoi ſi l'on met dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, en la place de $\frac{aa}{bb}$, ſa valeur $\frac{2a}{p}$, l'on aura $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$; d'où l'on tire cette analogie $aa - xx\ (AP \times PB) . yy\ (PM^2) :: 2a\ (AB) . p$, c'eſt-à-dire que le rectangle des deux parties de l'axe faites par l'appliquée, eſt au quarré de l'appliquée; comme le même axe, eſt à ſon parametre.

COROLLAIRE. VI.

7. IL ſuit du Corollaire précédent que le rectangle de l'axe *AB* par ſon parametre eſt égal au quarré de l'axe conjugué *DE*; puiſque $AB . DE :: DE . p$.

COROLLAIRE VII.

8. SI au lieu de $\frac{aa}{bb}$ ou de $\frac{2a}{p}$ on met un autre raport égal comme $\frac{m}{n}$ l'on aura, $aa - xx = \frac{myy}{n}$; c'eſt pourquoi l'on fera ſur l'équation à l'Ellipſe les trois remarques ſuivantes, après avoir délivré l'un des quarrez inconnus qu'elle renferme de toute quantité connue.

REMARQUE I.

9. LORSQUE l'antécédent du raport qui accompagne un des quarrez inconnus de l'équation à l'Ellipſe eſt égal & ſemblable au terme connu; ou ce qui eſt la même choſe, ſi cet antécédent renferme les mêmes lettres que le

le terme connu de l'équation ; ſa racine quarrée exprimera le demi diametre dont l'autre inconnue exprime les parties ; & la racine quarrée du conſéquent exprimera le demi diametre conjugué.

REMARQUE II.

10. LORSQUE cet antecedent eſt le double de la racine quarrée du terme connu, il exprimera le diametre dont l'autre inconnue exprime les parties ; & le conſéquent exprimera ſon parametre.

REMARQUE III.

11. EN tout autre cas ce raport marque le raport du diametre, dont une partie eſt exprimée par l'autre inconnue, à ſon parametre, ou le raport du quarré du même diametre au quarré du diametre conjugué. Tout cela eſt évident (n°. 6 & 8).

COROLLAIRE VIII.

12. D'OÙ il ſuit qu'une équation à l'Ellipſe renferme les expreſſions des deux diametres conjuguez, qui forment le parallelogramme des coordonnées, ou de l'un de ces diametres, & de ſon parametre, ou la raiſon du quarré de l'un des diametres au quarré de l'autre, ou enfin celle de l'un des deux à ſon parametre : de ſorte qu'on aura toujours les deux diametres conjuguez par le moyen de l'équation.

Par exemple, dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ le terme connu aa eſt le quarré du demi diametre AC ; l'antecedent aa du raport $\frac{aa}{bb}$ qui accompagne yy eſt ſemblable & égal au terme connu aa ; c'eſt pourquoi le conſéquent bb eſt le quarré du demi diametre conjugé CD à l'axe ou au diametre principal AC. Dans l'équation $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$, l'antecedent $2a$ étant double de la racine du terme connu aa ; $2a$ ſera le diametre AB, & p ſon parametre : & partant, ſi l'on fait $2a . p :: aa . \frac{1}{2}ap$; $\frac{1}{2}ap$ ſera FIG. 58.

l'expreſſion du quarré du demi diametre conjugué CD; & partant $CD = \sqrt{\frac{1}{4}ap}$. Enfin dans léquation $aa - xx = \frac{nyy}{n}$; aa exprime le quarré du demi diametre AC dont les parties CP ſont nommées x; & partant $AB = 2a$. Mais pour avoir l'expreſſion du demi diametre DE conjugué au diametre AB, l'on fera $m . n :: aa . \frac{naa}{m}$; & partant $\sqrt{\frac{n}{m}aa} = CD$, & $2\sqrt{\frac{n}{m}aa} = DE$. Et pour avoir l'expreſſion du parametre du diametre AB, l'on fera $m . n :: 2a . \frac{2an}{m}$, & cette quantité $\frac{2an}{m}$ ſera l'expreſſion cherchée.

COROLLAIRE IX.

FIG. 58. 13. SI l'on nomme AP, x; BP ſera, $2a - x$, & l'on aura (nº. 5.) $2ax - xx$ ($AP \times PB$). yy (PM^2) :: aa (AC^2). bb (CD^2); donc $2ax - xx = \frac{aayy}{bb}$, qui montre que lorſque les indéterminées n'ont point leur origine au centre de l'Ellipſe, il ſe trouve des ſeconds termes dans ſon équation, & qu'une équation locale appartiendra toujours à l'Ellipſe, lorſqu'elle renfermera deux quarrez inconnus, l'un deſquels ou tous deux ſeront accompagnez de quelque quantité connue, & auront differens ſignes dans les deux membres de l'équation, ou même ſigne dans le même membre, quelque mêlange de conſtantes qu'il s'y rencontre, & pourvu que les deux inconnues ne ſoient point multipliées l'une par l'autre.

COROLLAIRE X.

14. SI dans l'équation à l'Ellipſe $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, ou $2ax - xx = \frac{aayy}{bb}$, $a = b$, l'on aura $aa - xx = yy$ ou $2ax - xx = yy$; qui eſt une équation au cercle, pourvû que les coordonnées x & y faſſent un angle droit: car l'une & l'autre de ces deux équations donne $AP \times PB = PM^2$ qui eſt la principale propriété du cercle. D'où l'on voit auſſi que l'équation à l'Ellipſe ne differe de celle du cercle, qu'en ce que l'un des quarrez inconnus eſt accompagné de quelque quantité connue dans l'équation

à l'Ellipſe, & qu'ils en ſont tous deux délivrez dans l'équation au cercle. En effet le cercle peut être regardé comme une Ellipſe dont les foyers ſont confondus avec le centre, & dont tous les diametres ſont par conſéquent égaux entr'eux, & à leurs parametres.

Dans l'équation au cercle $aa - xx = yy$, les coordonnées ont leur origine au centre, & dans celle-ci, $2ax - xx = yy$, l'origine des coordonnées n'eſt point au centre.

PROPOSITION II.

Theorême.

15. *LES mêmes choſes que dans la premiére Propoſition étant ſuppoſées. Je dis que l'appliquée* FO *au foyer* F *eſt égale à la moitié du parametre de l'axe* AB. FIG. 58.

Il faut prouver que $FO = \frac{1}{2}p$.

DE'MONSTRATION.

SI dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{aa - cc}$, on fait x (CP) $= c$ (CF), le point P tombera en F, & PM deviendra FO; & l'on aura $aa - cc = \frac{yyaa}{aa - cc}$, d'où l'on tire $y = \frac{aa - cc}{a} =$ (Prop. 1.) $\frac{bb}{a} =$ (n°. 6.) $\frac{1}{2}p$. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION III.

Problême.

16. *LES deux axes conjuguez* AB, DE *d'une Ellipſe étant donnez, trouver les foyers* F, *&* G.

Soit du centre D, extrêmité de l'axe conjugué DE, & du rayon AC, décrit un cercle qui coupera AB en deux points F & G qui ſeront les foyers qu'il faloit trouver.

DE'MONSTRATION.

PAR la construction $FD + DG = AB$; donc (n°. 2.) F & G sont les foyers. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION IV.

Problême.

FIG. 58. 17. *LE grand axe* AB *d'une Ellipse & les foyers* F *&* G *étant donnez, déterminer l'axe conjugué à l'axe* AB.

Soit du foyer F pour centre & pour rayon le demi axe AC décrit un cercle. Il coupera la perpendiculaire à AB menée par le centre C en deux points D & E, & DE sera l'axe conjugué à l'axe AB.

DE'MONSTRATION.

ELLE est la même que celle de la Proposition précédente.

PROPOSITION V.

Theorême.

FIG. 58. 18. *SI l'on fait* MQ *perpendiculaire à* DE. *Je dis que le rectangle des deux parties* DQ, QE *de l'axe* DE *faites par l'appliquée* MQ, *est au quarré de* MQ: *comme* DE^2 *quarré de l'axe* DE *à* AB^2 *quarré de l'axe* AB.

En laissant aux lignes les mêmes noms qu'on leur a donnez dans la premiere Proposition, CP, ou QM étant x; & PM, ou CQ, y; DQ sera, $b - y$; & QE, $b + y$.
Il faut démontrer que $bb - yy \,.\, xx :: 4bb \,.\, 4aa$.

DE'MONSTRATION.

EN reprenant l'équation de la premiére Proposition $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, la multipliant par bb, la divisant par aa & transposant l'on aura $bb - yy = \frac{bbxx}{aa}$, d'où l'on tire cette

analogie $bb - yy \,.\, xx :: bb \,.\, aa :: 4bb \,.\, 4aa$. $DQ \times QE \,.\, QM^2 :: DE^2 \,.\, AB^2$. C. Q. F. D.

DÉFINITION.

19. SI l'on fait $2b \,.\, 2a :: 2a \,.\, \frac{2aa}{b}$ que je nomme p; la ligne $= p$ est appellée le *parametre* de l'axe DE.

COROLLAIRE.

20. $b \,.\, a :: 2a \,.\, p$, donne $bp = 2aa$, ou $bbp = 2aab$, ou $\frac{2b}{p} = \frac{bb}{aa}$; c'est pourquoi si on met $\frac{2b}{p}$ en la place de $\frac{bb}{aa}$ dans l'équation précedente, l'on aura $bb - yy = \frac{2bxx}{p}$, ou si l'on fait $\frac{m}{n} = \frac{2b}{p}$, l'on aura $bb - yy = \frac{mxx}{n}$.

On ajoutera à ce Corollaire les raisonnemens que l'on a faits nº. 9, 10, 11, 12, 13 & 14.

PROPOSITION VI.

Problême.

21. UNE *équation à l'Ellipse* $ab - xx = \frac{cyy}{d}$ *étant donnée, décrire l'Ellipse lorsque les coordonnées font un angle droit.*

Soit premierement trouvé une moyenne proportionnelle entre a, & b qui soit f; & par conséquent $ff = ab$; ainsi l'équation sera $ff - xx = \frac{cyy}{d}$. On fait ce changement parceque ab étant l'expression du quarré du demi diametre dont les parties sont nommées x, cette expression doit aussi être un quarré.

Soit présentement C, l'origine des inconnues x, qui va vers A & vers B, & y, qui va vers D & vers E. Le même point C doit aussi être le centre de l'Ellipse, puisque les inconnues x & y n'ont point de second terme dans l'équation. Soit fait CA & CB chacune $= f$; AB sera le grand axe, si c surpasse d; le petit, si c est moindre que d. Pour avoir l'axe conjugué à l'axe AB, FIG. 58.

soit fait $c . d :: ff . \frac{dff}{c}$, & soit prise CD & CE chacune égale à $\sqrt{\frac{dff}{c}}$. Pour trouver $CD = CE = \sqrt{\frac{dff}{c}} = n$; il faut chercher une moyenne proportionnelle entre c & d, qui sera nommée g : puis trouver à ces trois grandeurs $c. g. f.$ une quatriême proportionnelle qui sera $n = \sqrt{\frac{dff}{c}}$. Car puisque $c. g. d.$ sont en proportion continue, $c . d :: cc . gg$; mais ayant encore $c . g :: f . n$. on aura $cc . gg :: ff . nn$. donc $c . d :: ff . nn = \frac{dff}{c}$. & par conséquent $n = \sqrt{\frac{dff}{c}}$; DE sera (nº. 12.) l'axe cherché. Ayant ensuite trouvé les foyers F & G par la troisiême Proposition, on décrira l'Ellipse par la premiere.

DE'MONSTRATION.

ELLE est évidente par ce que l'on a démontré nº. 12. Prop. 1. & 3.

PROPOSITION VII.

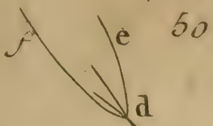
Problême.

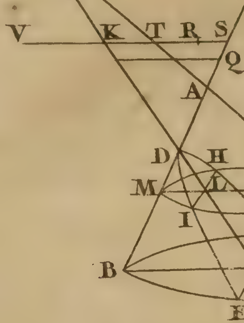
FIG. 62. XIII. UNE *Ellipse* ADBE, *dont* AB *est le grand axe*; C, *le centre*; F *&* G, *les foyers*, *étant donnée. Il faut d'un point quelconque* M *donné sur l'Ellipse mener la tangente* MT.

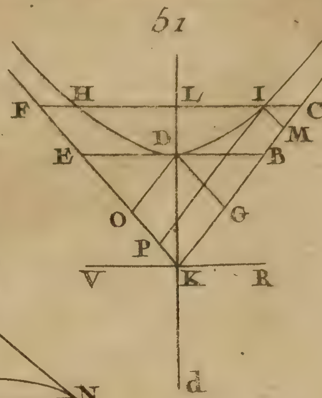
Ayant mené FM, & GM, prolongé FM, en I, en sorte que $MI = MG$, & mené GI. Je dis que la ligne MO menée du point M par le point O milieu de GI sera la tangente cherchée.

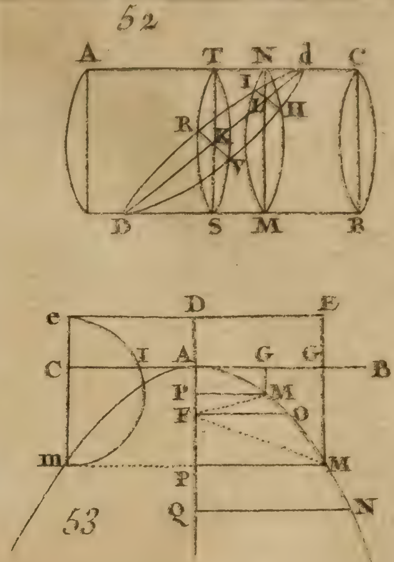
DE'MONSTRATION.

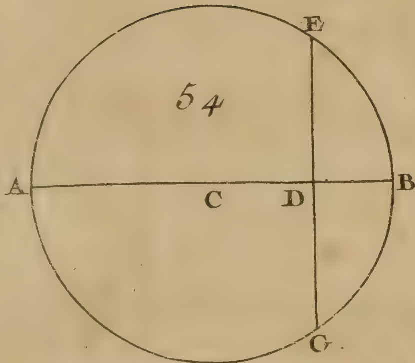
D'UN point quelconque L autre que M pris sur MO, ayant mené les droites LF, LG, LI; puisque par la construction $MG = MI$, & $IO = OG$, MO sera perpendiculaire à GI; c'est pourquoi le triangle GLI sera isoscele; & partant $FL + LI = LF + LG$ surpasse $FM + MI = FM + MG$; donc le point L est hors de l'Ellipse. C. Q. F. D.

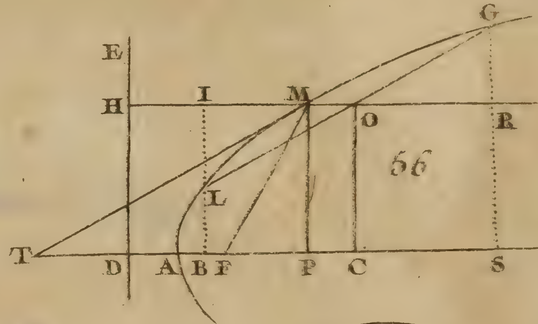

f
e
50
d

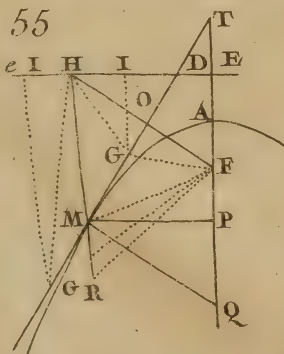

V K T R S
Q
A
D H
M L N
I F
B G C
E

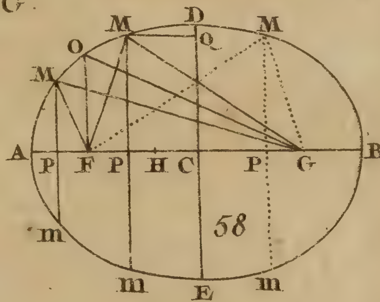

51
F H L I C
M
E D B
O G
P
V K R
d

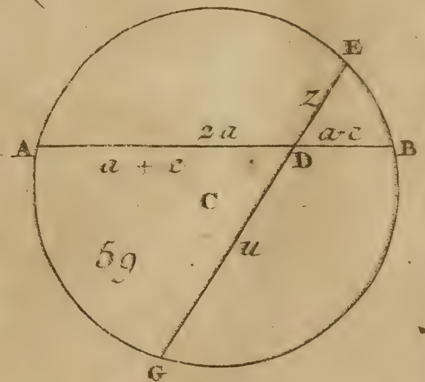

52
A T N d C
I
R L H
K
V
D S M B
e D E
C I A G G B
P M
F O
m P M
Q N
53

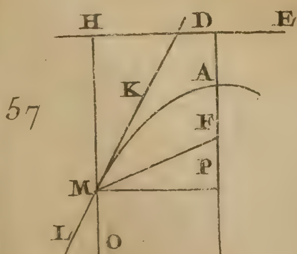

E
54
A C D B
G

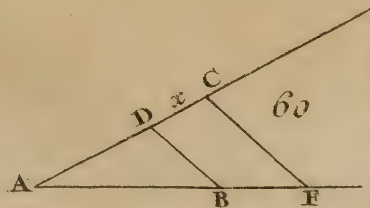

G
E
H I M O R
56
L
T D A B F P C S

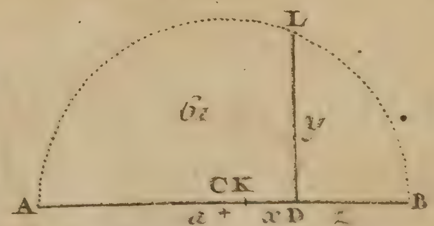

55
T
e I H I D E
O
A
G
F
M P
G R
Q

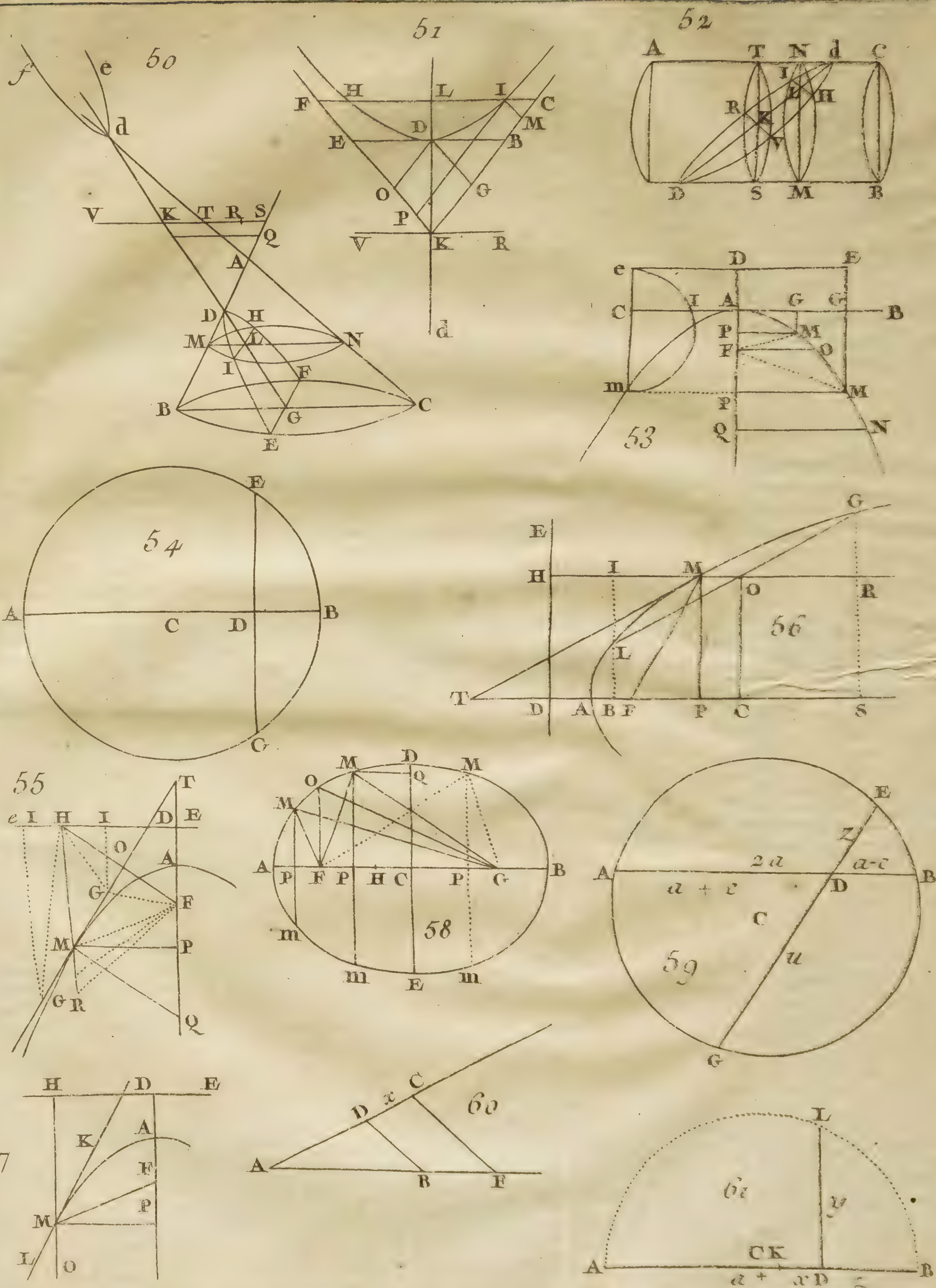

M D M
O Q
M
A P F P H C P G B
m
58
m E m


E
z
2a a-c
A B
a + c D
C
59
u
G


H D E
K A
57
F
P
M
L O


C
D x
60
A B F


L
61
y
C K
A B
a + x D z


50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61

COROLLAIRE I.

1. SI l'on mene *MK* parallele à *IG*; l'angle *KMO* sera droit : puisque (Const.) *GI* est perpendiculaire à *MO*.

COROLLAIRE II.

2. LA ligne *MK* partage l'angle *FMG* en deux également : car à cause de *KM* parallele à *GI*, l'angle *FMK* = *FIG* = *MGI* = *GMK*.

COROLLAIRE III.

3. LA tangente *MO* rencontre l'axe *AB* prolongé en *T*: car l'angle *GOT* est droit, & l'angle *OGT* est aigu.

COROLLAIRE IV.

4. L'ANGLE *FML* est égal à l'angle *GMO*; puisqu'ils sont les complémens des angles égaux *FMK*, *GMK*; d'où il suit que si le foyer *G* étoit un point lumineux, les rayons réfléchis à la rencontre de l'Ellipse passeroient tous par le foyer *F*.

DE'FINITIONS.

5. AYANT abbaissé du point *M* sur l'axe *AB* la perpendiculaire *MP*. *PT* est appellée la *soutangente*, *MK* la *perpendiculaire*, & *PK*, la *souperpendiculaire*, ou *sounormale*.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

6. *AYANT supposé les mêmes choses que dans la Proposition précédente; & nommé comme dans la première Proposition* AC, *ou* CB, a; CF, *ou* CG, c; CP, x; PM, y; FP *sera* c + x, *&* GP, c — x, *ou* x — c; *cela posé. Je dis que l'expression algebrique de la soutangente* PT *sera* $\frac{aa - xx}{x}$.

DE'MONSTRATION.

LE triangle rectangle GPM donne GM $= \sqrt{cc - 2cx + xx + yy}$. Et parceque MK est parallele à GI, & que $FI =$ (Prop. préced.) $FM + MG =$ (art. 12. nº. 2.) $AB = 2a$, l'on a $FI\ (2a) . FG\ (2c) :: MI$, ou $MG\ (\sqrt{cc - 2cx + xx + yy}) . GK$.

$FM . FK :: MG . GK$. Donc altern. $FM . MG :: FK . GK$. Donc com. $FM + MG = FI . MG :: FK + GK = FG . GK$. Donc altern. $FI . FG :: MG . GK$. $= \frac{c\sqrt{cc - 2cx + xx + yy}}{a}$; donc $PK = x - c +$ $\frac{c\sqrt{cc - 2cx + xx + yy}}{a}$, ou $\frac{ax - ac + c\sqrt{cc - 2cx + xx + yy}}{a}$, & à cause de l'angle droit KMT, l'on a PK $\left(\frac{ax - ac + c\sqrt{cc - 2cx + xx - yy}}{a}\right) . PM\ (y) :: PM\ (y) . PT$ $= \frac{ayy}{ax - ac + c\sqrt{cc - 2cx + xx + yy}}$: mais (Prop. 1.) $aa - xx = \frac{aayy}{aa - cc}$ d'où l'on tire $yy = \frac{a^4 - aacc - aaxx + ccx^x}{aa}$; c'est pourquoi en mettant cette valeur de yy dans celle de PT, l'on aura après la réduction, & division, PT $= \frac{a^4 - aacc - aaxx + ccxx}{aax - aac + c\sqrt{a^4 - 2aacx + ccxx}}$: mais $a^4 - 2aacx + ccxx$ est un quarré dont la racine est $aa - c^x$; c'est pourquoi cette derniere valeur de PT se change en celle-ci, après avoir ôté ce qui se détruit, & divisé les deux termes de la fraction par $aa - cc$. $PT = \frac{aa - xx}{x}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

COROLLAIRE I.

7. $CP(x) . PB(a-x) :: AP(a+x) . PT\left(\frac{aa-xx}{x}\right)$ ce qui fournit un autre moyen de mener la tangente MT.

COROLLAIRE II.

8. SI l'on ajoute $x = CP$ à l'expreſſion de $PT = \frac{aa-xx}{x}$ l'on aura $CT = \frac{aa}{x}$ qui fournit encore un autre moyen de mener une tangente à l'Ellipſe, en faiſant $CP(x) . CB(a) :: CB(a) . CT\left(\frac{aa}{x}\right)$.

COROLLAIRE III.

9. SI de $\frac{aa}{x} = CT$, l'on ôte $a = CB$, l'on aura $BT = \frac{aa-ax}{x}$, qui donne encore un autre moyen de mener une tangente à l'Ellipſe en faiſant $CP(x) . PB(a-x) :: CB(a) . BT\left(\frac{aa-ax}{x}\right)$.

COROLLAIRE IV.

10. IL eſt clair que l'angle CMT eſt toujours obtus : car la perpendiculaire MK à la tangente MT diviſant l'angle GMF en deux également, GM étant moindre que FM, GK ſera auſſi moindre que FK ; & par conſequent le point K tombera toujours entre C, & G.

PROPOSITION IX.

Theorême.

11. A*YANT ſuppoſé les mêmes choſes que dans la Prop. précedente. Si l'on prolonge le petit axe* CD, *& la tangente* MO *du côté de* M, *ces lignes ſe rencontreront en un point* H ; *ſi* FIG. 62.

l'on mene MQ *parallele à* BC, *&* *qu'on nomme* CD, b ; *en laissant aux autres lignes les noms qu'on leur a donnez en la Proposition précedente. Je dis que l'expression Algebrique de la soutangente* QH, *sera* $\frac{bb-yy}{y}$.

DEMONSTRATION.

PQ étant le parallelogramme des coordonnées $CQ = PM$ sera, y ; & $MQ = CP$, x. Et les triangles semblables *PTM*, *MQH* donneront $TP\left(\frac{aa-xx}{x}\right) . PM, (y) :: MQ (x) . QH = \frac{xxy}{aa-xx}$: mais (Prop. 1.) $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$; donc $xx = \frac{aabb-aayy}{bb}$; mettant donc cette valeur de xx dans celle de *QH*, l'on aura après la réduction, $QH = \frac{bb-yy}{y}$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

12. SI l'on ajoute $y = CQ$ à $QH = \frac{bb-yy}{y}$, l'on aura $CH = \frac{bb}{y}$, d'où l'on tire $CQ (y) . CD (b) :: CD (b) . CH \left(\frac{bb}{y}\right)$.

PROPOSITION X.

Theorême.

FIG. 63. 13. SOIT *une Ellipse* ADBE, *dont* AB *&* DE *sont les axes conjuguez ;* C, *le centre ;* MT, *une tangente qui rencontre les axes conjuguez en* H *&* *en* T. *Je dis que la ligne* GOL *parallele à la tangente* MT *sera divisée en deux également*

en O *par la ligne* MCV *menée du point touchant* M *par le centre* C.

Ayant mené par les points L, M, O, G, les lignes LK, MP, OQ, GX perpendiculaires à l'axe AB, & par O la ligne RON parallele à AB qui rencontrera KL en N, & XG en R, & nommé les données AC, ou CB, a; CD, ou CE, b; & les indéterminées CP, x; PM, y; CQ, m; QX, ou OR, z; QK, ou GN, f; AX sera $a+m-z$; BX, $a-m+z$; AK, $a+m+f$; & KB, $a-m-f$.

Il faut prouver que $GO=OL$, ou ce qui est la même chose, $RO(z)=ON(f)$.

DE'MONSTRATION.

Les triangles semblables CPM, CQO donnent $CP(x) . PM(y) :: CQ(m) . QO=\frac{my}{x}=RX=KN$: l'on a aussi (n°. 8.) $CT=\frac{aa}{x}$, & (n°. 12.) $CH=\frac{bb}{y}$, & les triangles semblables TCH, ORG, ONL, donnent $TC\left(\frac{aa}{x}\right) . CH\left(\frac{bb}{y}\right) :: OR(z) . RG=\frac{bbzx}{aay}$, & $TC\left(\frac{aa}{x}\right) . CH\left(\frac{bb}{y}\right) :: ON(f) . NL=\frac{bbfx}{aay}$; donc $XG=\frac{my}{x}+\frac{bbzx}{aay}$, & $KL=\frac{my}{x}-\frac{bbfx}{aay}$. Mais (art. 12. n°. 5.) $aa(CB^2) . bb(CD^2) :: aa-mm+2mz-zz(AX\times XB) . \frac{mmyy}{xx}+\frac{2bbmz}{aa}+\frac{b^4zzxx}{a^4yy}(XG^2)$, & $aa(CB^2) . bb(CD^2) :: aa-mm-2mf-ff(AK\times KB) . \frac{mmyy}{xx}-\frac{2bbmf}{aa}+\frac{b^4ffxx}{a^4yy}(KL^2)$ d'où l'on trouve ces deux équations.

$A.\ \frac{aammyy}{xx} + 2bbmz + \frac{b^4zzxx}{aayy} = aabb - bbmm + 2bbmz - bbzz$, &

$B.\ \frac{aammyy}{xx} - 2bbmf + \frac{b^4ffxx}{aayy} = aabb - bbmm - 2bbmf - bbff$,

& ayant ôté la seconde de la premiere, le premier membre du premier, & le second du second, l'on aura celle-ci,

$2bbmz + 2bbmf + \frac{b^4zzxx}{aayy} - \frac{b^4ffxx}{aayy} = 2bbmz + 2bbmf - bbzz + bbff$, d'où l'on tire $zz = ff$; car après avoir effacé de l'équation *D* les termes qui se détruisent, il restera $\frac{b^4zzxx}{aayy} - \frac{b^4ffxx}{aayy} = - bbzz + bbff$. On divisera ce reste par bb, & l'on multipliera le quotient par $aayy$, il viendra $bbzzxx - bbffxx = - aayyzz + aaffyy$. On égalera le tout à o, ce qui donnera $bbzzxx - bbffxx + aayyzz + aaffyy = o$. On divisera cette équation par $bbxx + aayy$, & l'on aura au quotient $zz - ff = o$, ou bien $zz = ff$, ou $z = f$, $OR = ON$; donc $GO = OL$. C. Q. F. D.

La position de la ligne *GL* peut changer en bien des manieres à mesure que le point *O* s'approche ou s'éloigne du centre *C*, ou se trouve au-delà par raport à *M*: mais cela ne peut au plus que changer les signes dans les expressions des lignes *AX*, *XB*, *AK*, *KB*, *XG* & *KL*, & l'on trouvera toujours $z = f$; c'est pourquoi la Proposition est généralement vraye.

COROLLAIRE I.

14. IL est clair que la ligne *FCS* menée par le centre *C*, parallele à la tangente *MT* est divisée en deux éga-

lement par le centre C: car le point O tombant en C, GL devient FS, & comme le point M peut être pris indifferemment ſur tous les points de l'Ellipſe; il s'enſuit que toutes les lignes comme FCS, ſont coupées par le milieu en C; puiſqu'elles peuvent toujours être paralleles à une tangente MT menée par l'extrêmité M d'une autre ligne MCV qui paſſe auſſi par le centre C.

DE'FINITIONS.

15. LEs lignes MCV, FCS qui paſſent par le centre d'une Ellipſe ſont nommées *diametres*, & lorſque deux diametres MCV, FCS ſont poſez de maniere que l'un des deux FCS eſt parallele à la tangente MT menée par l'extrêmité M de l'autre MCV; ils ſont nommez *diametres conjuguez*; & les lignes OG, OL ſont nommées *ordonnées*, ou *appliquées* au diametre MV.

COROLLAIRE II.

16. IL eſt évident que les ordonnées à un diametre quelconque ſont diviſées en deux également par le même diametre.

COROLLAIRE III.

17. IL eſt clair que la poſition des diametres conjuguez eſt déterminée par la poſition de la tangente menée par l'une de leurs extrêmitez.

COROLLAIRE IV.

18. SI l'on ajoute les deux équations A & B de la propoſition précédente, après avoir mis z en la place de f, le premier membre au premier & le ſecond au ſecond, l'on aura celle-ci $\frac{2aammyy}{xx} + \frac{2b^4zzxx}{aayy} = 2aabb - 2bbmm - 2bbzz$, ou, en ſuppoſant que le point O tombe en C, auquel cas $QK = z$ devient CI, GL devient FS, KL, devient SI, & $CQ = m$ devient nulle ou $= 0$, ce qui

détruit les termes où m se rencontre; $\frac{bbzzxx}{aayy} = aa - zz$; d'où l'on tire $zz = aa - xx$, en mettant pour $aayy$ sa valeur $aabb - bbxx$ tirée de l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, trouvée par la premiere Proposition; d'où l'on conclud que $CI^2 = AP \times PB$.: & que $CP^2 = AI \times IB$: car l'on a aussi $xx = aa - zz$.

COROLLAIRE V.

FIG. 63. 19. SI l'on fait dans cette équation $xx = aa - zz$, z (CI) $= x$ (CP); les points P & I se confondront en un
FIG. 64. seul point Y, & les deux diametres conjuguez MV, FS seront égaux, & l'on aura $2xx = aa$; donc $x = \sqrt{-\frac{1}{2}aa}$ qui servira à déterminer leur position en cette sorte. Soit prise CY moyenne proportionnelle entre CB & sa moitié, & menée par Y la perpendiculaire MYS qui rencontrera l'Ellipse aux points M & S, par où l'on menera les diametres conjuguez MV, FS qui seront égaux.

COROLLAIRE VI.

FIG. 64. 20. IL est clair que $AY \times YB = CY^2$: car l'équation (n°. 18.) $xx = aa - zz$ subsiste toujours, quoique $x = z$ ou $CP = CI = CY$.

COROLLAIRE VII.

21. A Cause de $AY \times YB = CY^2 =$ (n°. 19.) $\frac{1}{2}aa$, l'on a (Art. 12. n°. 5.) $\frac{1}{2}aa$ (CY^2). yy (PM^2) :: aa (CB^2). bb (CD^2); car (Art. 12. n°. 5.) on a $aa - xx . yy :: aa . bb$. Mais (n°. 19.) $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$. Donc $xx = \frac{1}{2}aa$. Donc substituant $\frac{1}{2}aa$ dans le premier terme $aa - xx$ de l'analogie précedente à la place de xx, on aura $aa - \frac{1}{2}aa = \frac{1}{2}aa . yy :: aa . bb$, d'où l'on tire $y = \sqrt{\frac{1}{2}bb}$, qui servira à trouver le point Q sur CD, comme l'on a trouvé

(n°. 19.) le point *Y* ſur *CA*; & la perpendiculaire *FQM* déterminera auſſi la poſition des deux diametres conjuguez égaux *MCV*, *FCS*.

COROLLAIRE VIII.

22. PUISQUE (Art. 12. n°. 5.) $AP \times PB$, ou (n°. 18.) $CI^2 . PM^2 :: CB^2 . CD^2$, & $AI \times IB$ ou (n°. 18.) $CP^2 . IS^2 :: CB^2 . CD^2$, l'on a $CI^2 . PM^2 :: CP^2 . IS^2$, ou $CI . PM :: CP . IS$, d'où il ſuit que les triangles *CPM*, *CIS* ſont égaux. FIG. 63.

PROPOSITION XI.

Theorême.

23. *AYANT ſuppoſé les mêmes choſes que dans la Propoſition précédente. Je dis que le rectangle* VO × OM *des parties du diametre* MV *faites par l'appliquée* OL *eſt à* OL^2, *quarré de la même appliquée; comme* VM^2, *quarré du diametre* VM, *eſt à* FS^2, *quarré du diametre conjugué à* VM. FIG. 63.

Ayant nommé *AC*, ou *CB*, *a*; *CD*, ou *CE*, *b*; *CP*, *x*; *PM*, *y*; *OR*, ou *ON*, *z*; *CQ*, *m*; *CV* ou *CM*, *d*; *FC*, ou *CS*, *f*; *CO*, *u*; & *OL* ou *OG*, *ſ*.

Il faut prouver que $dd - uu . ſſ :: dd . ff :: 4dd . 4ff$.

DÉMONSTRATION.

L'ON a (art. 12.)

$A.\ aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, les triangles ſemblables *MCP*, *OCQ*, donnent $d\,(CM) . x\,(CP) :: u\,(CO) . m\,(CQ)$; donc

$B.\ dm = ux$, & les triangles ſemblables *SCI*, *LON*, & $CI^2 =$ (n°. 18.) $aa - xx$, donnent $ff\,(CS^2) . aa - xx\,(CI^2) :: ſſ\,(LO^2) . zz, (ON^2)$; donc

$C.\ ffzz = aaſſ - xxſſ$.

En reprenant préſentement l'équation du quatriême Corollaire de la Propoſition précédente n°. 18, qui étant diviſée par 2, devient,

$D. \frac{aammyy}{xx} + \frac{b^4zzxx}{aayy} = aabb - bbmm - bbzz$, & en mettant dans le numerateur du premier terme, & dans le dénominateur du ſecond pour $aayy$, ſa valeur $aabb - bbxx$ tirée de l'équation A, l'on aura $\frac{aamm}{xx} + \frac{zzxx}{aa - xx} = aa - zz$, & mettant encore pour mm ſa valeur $\frac{uuxx}{dd}$ tirée de l'équation B, & pour zz, ſa valeur $\frac{aaff - xxff}{ff}$ tirée de l'équation C, l'on aura après les réductions & tranſpoſitions, $dd - uu = \frac{ddff}{ff}$, d'où l'on tire $dd - uu . ff :: dd . ff :: 4dd . 4ff$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

24. SI MV & FS ſont les deux diametres conjuguez égaux, d ſera $= f$; & l'équation deviendra $dd - uu = ff$, qui ſeroit une équation au cercle, ſi l'appliquée OL faiſoit un angle droit avec CM.

DÉFINITION.

25. SI l'on fait $d . f :: 2f . p$, la ligne p ſera appellée le *parametre* du diametre MV.

COROLLAIRE II.

26. LA proportion $d . f :: 2f . p$ donne $dp = 2ff$; donc en multipliant par d, l'on a $ddp = 2dff$; donc $\frac{2d}{p} = \frac{dd}{ff}$; c'eſt pourquoi ſi l'on met dans l'équation précédente pour $\frac{dd}{ff}$ ſa valeur $\frac{2d}{p}$, l'on aura $dd - uu = \frac{2dff}{p}$ d'où l'on tire $dd - uu . ff :: 2d . p$.

COROLLAIRE

COROLLAIRE III.

27. L'ON peut encore mettre pour $\frac{2d}{p}$ un autre raport $\frac{m}{n} = \frac{2d}{p} = \frac{dd}{ff}$; & l'on aura $dd - uu = \frac{mss}{n}$, d'où l'on tire tire $dd - uu \,.\, ss :: m \,.\, n$.

On ajoutera ici les mêmes choses que l'on a dites art. 12. n°. 9, 10, 11, 12, 13, & 14.

PROPOSITION XII.

Theorême.

28. *LES mêmes choses étant encore supposées, si l'on mene* Gq *parallele à* MV. *Je dis que* $Fq \times qS \,.\, qG^2 :: FS^2 \,.\, VM^2$.

En nommant encore CM, ou CV, d ; CS, ou CF, f ; CO, ou qG, u ; OG, ou Cq, s ; Fq sera $f - s$; & qS, $f + s$.

Il faut prouver que $ff - ss \,.\, uu :: 4ff \,.\, 4dd$.

DE'MONSTRATION.

EN reprenant l'équation de la Proposition précédente $dd - uu = \frac{ddss}{ff}$, la multipliant par ff, transposant & divisant par dd, l'on en tirera $ff - ss = \frac{ffuu}{dd}$, qui donnera $ff - ss \,.\, uu :: ff \,.\, dd :: 4ff \,.\, 4dd$. *C. Q. F. D.*

DE'FINITION.

29. SI l'on fait $f \,.\, d :: 2d \,.\, p$, la ligne $= p$ sera appellée le *parametre* du diametre FS.

COROLLAIRE I.

30. LA Proportion précédente donne $pf = 2dd$; donc $pff = 2fdd$, ou $\frac{2f}{p} = \frac{ff}{dd}$; mettant donc dans l'équation précedente pour $\frac{ff}{dd}$ sa valeur $\frac{2f}{p}$, l'on aura $ff - ss = \frac{2fuu}{p}$; d'où l'on tire $ff - ss . uu :: 2f . p$.

COROLLAIRE II.

31. L'ON peut encore changer le raport $\frac{ff}{dd}$, ou $\frac{2f}{p}$ en un autre raport égal, $\frac{m}{n}$, & l'on aura $ff - ss = \frac{muu}{n}$, ce qui donne $ff - ss . uu :: m . n$.

On ajoutera encore ici ce qu'on a dit art. 12. n°. 9, 10, 11, 12, 13 & 14.

COROLLAIRE III.

32. IL est clair (n°. 25. & 29.) que le rectangle de l'un des diametres conjuguez par son parametre est égal au quarré de l'autre diametre.

PROPOSITION XIII.

Problême.

33. *DEUX lignes quelconques* FS *&* MV *qui se coupent par le milieu en* C *à angles obliques étant données de position & de grandeur pour deux diametres conjuguez d'une Ellipse, déterminer la position & la grandeur des axes de la même Ellipse.*

Cette Proposition contient deux cas qu'on pourroit néanmoins réduire à un seul, comme on va voir dans le second: le premier est lorsque les lignes *FS* & *MV* sont égales: le second lorsqu'elles sont inégales.

PREMIER CAS.

34. AYANT joint les points M, S & M, F, & ayant divisé MS & MF par le milieu en P & Q, on menera les lignes CP, CQ indéfiniment prolongées de part & d'autre qui se couperont à angles droits en C, puisque CS, CM, CF sont égales, & que les points P & Q divisent par le milieu MS & MF. Fig. 65.

Soit ensuite fait $PI = CP$ & $QH = CQ$, & du centre C par I, & par H décrit deux cercles qui couperont CP, & CQ aux points A, B, D & E. Je dis que l'Ellipse dont AB & DE sont les axes, passera par les points M, F, V & S.

DE'MONSTRATION.

AYANT nommé AC, ou CB, a; CD, ou CE, b; CP, ou PI, x; PM, ou CQ, ou QH, y; l'on a par la propriété du cercle, & par la Construction, $aa - xx$ ($AP \times PB$) $= xx$ (PI^2, ou CP^2), & $bb - yy$ ($EQ \times QD$) $= yy$ (QH^2, ou CQ^2), d'où l'on tire $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, & $y = \sqrt{\frac{1}{2}bb}$; c'est pourquoi (n°. 19. & 21.) les points S, M, V & F, sont à l'Ellipse dont les axes sont AB, & DE. C. Q. F. D.

SECOND CAS.

35. SOIT prolongée CM du côté de M, & soit faite MK prise sur le prolongement, égale à la troisiéme proportionnelle à CM & CS; & ayant mené par M la droite HMT parallele à FS, du point O milieu de CK, on élévera la perpendiculaire OG qui rencontrera HMT en un point G; puisque (n°. 13.) MT est tangente à l'Ellipse dont MV & FS sont deux diametres conjuguez; & que (n°. 10.) l'angle CMT est obtus, & du centre G par C, l'on décrira un cercle qui passera par K, & coupera MG aux points T & H par où, & par C, l'on menera TC, & HC indéfiniment prolongées au-delà de C par raport à T & à H : l'on menera ensuite MP & MQ paralleles à Fig. 66.

CH & à CT; & ayant pris CB moyenne proportionnelle entre CT & CP; CD, moyenne proportionnelle entre CH & CQ, fait $CA = CB$, & $CE = CD$. Je dis que l'Ellipse dont AB & ED (qui à cause du cercle se coupent à angles droits) sont les axes, passera par les points M, F, V & S.

DE'MONSTRATION.

AYANT abaissé du centre G sur CT la perpendiculaire GN, le point N divisera CT par le milieu en N; & partant $NG = \frac{1}{2} CH$, & ayant abbaissé du point S sur la même CT la perpendiculaire SI, & nommé les données CB, ou CA, a; CD, ou CE, b; CM ou CV, d; CF, ou CS, f; & les indéterminées CP, ou QM, x; PM, ou CQ, y; & CI, z; l'on aura (Const.)

$CP (x) . CB (a) :: CB (a) . CT = \frac{aa}{x}$, &

$CQ (y) . CD (b) :: CD (b) . CH = \frac{bb}{y}$; donc $NT = \frac{aa}{2x}$; car $NT = CN$, par construction. $NG = \frac{bb}{2y}$, $TP = \frac{aa}{x} - x$, & $QH = \frac{bb}{y} - y$, & les triangles semblables CIS, MQH, TPM donneront $CI (z) . CS (f) :: MQ (x) . MH = \frac{fx}{z}$, & $CI (z) . CS (f) :: TP \left(\frac{aa}{a} - x\right) . TM = \frac{aaf}{zx} - \frac{fx}{z}$; donc $HM + MT$, ou $HT = \frac{aaf}{zx}$; & partant $GT = \frac{aaf}{2zx}$; donc à cause de l'angle droit GNT, $\frac{a^4 ff}{4zzxx} (GT^2) = \frac{a^4}{4xx} + \frac{b^4}{4yy} (NT^2 + NG^2)$, d'où l'on tire $ff = zz + \frac{b^4 zzxx}{a^4 yy}$. Mais l'on a aussi

$MQ(x) . QH \left(\frac{bb}{y} - y\right) :: CI(z) . IS = \frac{bbz}{xy} - \frac{zy}{x}$; donc à cauſe de l'angle droit CIS, $ff(CS^2) = zz + \frac{b^4zz}{xxyy} - \frac{2bbzz}{xx} + \frac{zzyy}{xx}$ $(CI^2 + IS^2)$; donc $zz + \frac{b^4zzxx}{a^4yy} = zz + \frac{b^4zz}{xxyy} - \frac{2bbzz}{xx} + \frac{zzyy}{xx}$; cette équation délivrée de fractions donnera

$A.\ b^4x^4 = a^4b^4 - 2a^4bbyy + a^4y^4.$

Pour abreger encore il faut diviſer cette équation par zz, qu'il faut égaler à o, & l'on aura

$B.\ a^4b^4 - 2a^4bbyy + a^4y^4 - b^4x^4 = 0.$

Laquelle étant diviſée par $aabb + bbxx - aayy$, il viendra au quotient $aabb - bbxx - aayy = 0$, qui ſe réduit à cette équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, qui eſt une équation à une Ellipſe dont les axes ſont (Prop. 1.) $AB = 2a$, & $DE = 2b$, & qui prouve au moins que cette Ellipſe paſſe par les points M, & V; puiſque (Hyp.) $CM = CV$.

Or (Conſt.) $CM(d) . CS(f) :: CS(f) . MK = \frac{ff}{d}$: mais par la proprieté du cercle $\frac{aaffx}{zzx} - \frac{ffxx}{zz}$ $(HM \times MT = CM \times MK = \text{Conſt. } CS^2) = ff$, d'où l'on tire $zz = aa - xx$; c'eſt pourquoi (nº. 18.) l'Ellipſe paſſe auſſi par les points S & F. C. Q. F. D.

REMARQUE.

POUR trouver le diviſeur $aabb - aayy - bbxx$, tirez la racine quarrée de l'équation marquée (A) vous aurez $aabb - aayy = \pm bbxx$, laquelle étant réduite à o, donnera $aabb - aayy - bbxx = 0$, qui ſera le diviſeur cherché.

Si vous voulez une maniere plus générale pour trouver ce diviſeur, ordonnez l'équation A en cette ſorte,

C. $a^4y^4 - 2a^4bbyy = b^4x^4 - a^4b^4$.

Divisez-la par a^4, & vous aurez

$$D.\ y^4 - 2bbyy = \frac{b^4x^4}{a^4} - b^4.$$

Ajoutez de part & d'autre le quarré b^4 de la moitié bb du coefficient $2bb$ du second terme $2bbyy$, & vous aurez

$$E.\ y^4 - 2bbyy + b^4 = \frac{b^4x^4}{a^4}.$$

Tirez la racine quarrée de part & d'autre, & vous aurez

$$F.\ yy - bb = \pm \frac{bbxx}{aa}.$$

Multipliez tout par aa, & vous aurez $aayy - aabb = \pm bbxx$. Faisant passer tout d'un côté, vous aurez les deux équations $aayy - aabb + bbxx = 0$, & $aayy - aabb - bbxx = 0$, à cause qu'un quarré positif a toujours deux racines, l'une positive & l'autre négative. Enfin changeant les signes de la premiere de ces deux dernieres équations, vous aurez $aabb - aayy - bbxx = 0$, qui est le diviseur cherché.

COROLLAIRE.

36. SI $MV = FS$; CM sera $= MK$; car par la construction MK a été faite égale à la troisiême proportionnelle, à CM & CS. Donc si $MV = FS$, par conséquent $CM = CS$. Donc $CM = MK$; & partant les points O & G se confondront avec le point M, qui sera le centre du cercle qui étant décrit par C déterminera la position des axes par sa rencontre avec HT en H & en T, qu'on déterminera comme on vient de faire.

PROPOSITION XIV.

Problême.

UNE *équation à l'Ellipse* $ab - xx = \frac{cyy}{d}$ *étant donnée, décrire l'Ellipse, lorsque les coordonnées sont un angle oblique.*

On déterminera la grandeur des diametres conjuguez

par la Prop. 6. on trouvera les axes par la Propoſition precedente ; on déterminera les foyers par la troiſiême, & on décrira l'Ellipſe par la premiere.

SECTION VII.

Où l'on démontre les principales proprietez de l'Hyperbole décrite par des points trouvez ſur un Plan.

PROPOSITION I.

Theorême.

XIV. *UN angle quelconque* HCK, *& un point quelconque* D *dans cet angle, étant donnez de poſition ſur un Plan ; ſi l'on mene librement par le point* D *une ligne* IDK *qui rencontre* CH *&* CK *en* I *& en* K, *& qu'on prenne ſur* IDK *la partie* KO = ID. *Je dis que les points* O *&* D, *& tous ceux que l'on trouvera comme on vient de faire le point* O, *en menant d'autres lignes par le point* D, *ſeront à une Hyperbole, dont* CH *&* CK *ſont les aſymptotes.* Fig. 67.

DÉMONSTRATION.

AYANT mené par les points D & O, les lignes DL, OG paralleles à CK, & DN, OF paralleles à CH, & nommé les données DL, ou CN, ou (Conſt.) FK, c; car $KN = OG$, puiſque le triangle KDN a ſes côtez égaux aux côtez du triangle OGI, chacun à chacun. 1°. Le côté $KD = OI$; car (par conſtruction) $KO = DI$. Donc ajoutant OD, on aura $KD = OI$. 2°. L'angle adjacent NKD eſt égal à l'angle adjacent GOI, puiſqu'ils ſont externe & interne du même côté. 3°. L'autre angle adjacent NDO eſt auſſi égal à l'autre angle adjacent GIO

par la même raison. Donc le triangle *NKD* est égal au triangle *GOI*. Donc leurs côtez sont égaux chacun à chacun. Donc *KN* = *OG*. Mais *OG* = *FC*, étant paralleles entre-elles, & comprises entre les mêmes paralleles *OF*, *GC*, par construction. Donc *KN* = *FG*. Donc ôtant *FN* de part & d'autre, il restera *FK* = *CN* = *DL*.

Reprenons. Ayant donc nommé *DL*, ou *CN* ou *FK*, c; *DN*, ou *LC*, d; & les indéterminées *CF*, ou *GO*, f; *FO*, ou *CG* ou *NR*, z; *NF* ou *RO* sera $f - c$, & *DR*, $d - z$; les triangles semblables *DRO*, *OFK* donneront $d - z$ (*DR*). $f - c$ (*RO*) :: z (*OF*). c (*FK*); donc $cd - cz = fz - cz$, ou $cd = fz$. Et comme cette équation est la même que celle qu'on a trouvée (art. 9. n°. 16.), il suit que la courbe décrite comme on vient de dire, est une Hyperbole. Et parceque f croissant, z diminue, ou au contraire, & qu'on peut augmenter f à l'infini, z diminuera aussi à l'infini; c'est pourquoi les lignes *CH*, & *CK* sont les asymptotes, parcequ'elles ne peuvent jamais rencontrer l'Hyperbole. *C. Q. F. D.*

L'équation $cd = fz$ peut aussi se résoudre par le cercle.
FIG. 68. Car faisant un cercle *ABC*, dont le rayon *CA* sera pris à volonté, si on mene la corde *AB*, dont $AD = c$ & $DB = d$, & que par le point *D* qui sépare les deux lignes données, on tire à volonté une autre corde *EG*, la ligne *ED* sera égale à z, & *DG* égalera f. Mais comme on peut prendre le rayon du cercle aussi grand que l'on voudra, il est manifeste que z & f augmenteront à l'infini.

COROLLAIRE I.

FIG. 67. 1. IL est clair que tous les rectangles semblables à $CF \times FO$ sont égaux entr'eux, puisqu'ils sont toujours égaux au même rectangle $CL \times LD$; & que l'on a toujours $fz = cd$.

COROLLAIRE II.

2. SI l'on prend sur l'Hyperbole un point quelconque *B*, & que l'on mene par *B* une ligne quelconque *TBVS* qui

qui rencontre l'Hyperbole en un autre point V, & les asymptotes en T & en S, TB sera toujours égale à VS : car ayant mené BX & VQ, paralleles aux asymptotes, l'on aura (Corol. 1.) $CX \times XB = CQ \times QV$, ou (en nommant CX, d ; XB, c ; CQ, f ; QV, z ;) $fz = cd$, ou $fz - cz = cd - cz$, qui étant changée en analogie, donne $d - z . f - c :: z . c$ d'où il suit par la Démonstration de cette Proposition que $XB = QS$; donc $TB = VS$.

COROLLAIRE III.

3. IL est clair que les parallelogrammes CD, CB, CO, CV sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE IV.

4. SI l'on avoit nommé NF, ou RO, f, l'on auroit eu $fz = cd - cz$, qui montre que lorsqu'une équation à l'Hyperbole renferme plus de deux termes, les indéterminées n'ont point leur origine au sommet de l'angle des asymptotes.

COROLLAIRE V.

5. IL est évident que lorsqu'on décrit une Hyperbole par un point fixe, comme D, les points O que l'on trouve en faisant $KO = DI$ peuvent servir à en trouver d'autres comme B, & B à en trouver d'autres comme V, &c.

PROPOSITION II.

Theorême.

6. E*N supposant les mêmes choses que dans la premiere Proposition, si l'on mene par le sommet* C *de l'angle des asymptotes une ligne quelconque* CM *qui rencontre* OG *&* DL, *prolongées ou non prolongées en* P *& en* M. *Je dis que le rectangle* CM × CN, *ou* CM × LD *est égal au rectangle* CP × CF, *ou* CP × GO. FIG. 67.

Ayant nommé les données CL, d; CN, c; CM, a, & les indéterminées CF, ou GO, $ſ$; CG, ou FO, z; CP, u.

Il faut prouver que $ac = uſ$.

DÉMONSTRATION.

A Cauſe des triangles ſemblables CLM, CGP, l'on a $CL . CM :: CG . CP$, ou en termes algebriques $d . a :: z . u$; donc $du = az$: mais (Prop. 1.) $ſz = cd$, d'où l'on tire $z = \frac{cd}{ſ}$; mettant donc cette valeur de z dans l'équation précédente, l'on aura $ſu = ac$. C. Q. F. D.

On peut encore démontrer cette Propoſition en cette ſorte. A cauſe des paralleles DM, OP, l'on a $CL . CG :: CM . CP$; c'eſt pourquoi en mettant dans l'équation de la Propoſition précédente $ſz = cd$, en la place de d (CL) & de z (CG) leurs proportionnelles a (CM) & u (CP), l'on aura $ſu = ac$.

PROPOSITION III.

Problême.

FIG. 69. 7. *UNE Hyperbole* MBm, *dont les aſymptotes ſont* CT, *&* CH, *étant donnée, il faut d'un point quelconque* B, *donné ſur l'Hyperbole, mener une tangente* HBT.

Ayant mené par B les droites BG & BI paralleles aux aſymptotes, ſoit priſe $IT = CI$. Je dis que la ligne TBH menée du point T par B touchera l'Hyperbole en B, & ne la rencontrera en aucun autre point.

DÉMONSTRATION.

PAR l'Hypotheſe TBH rencontre l'Hyperbole en B; & parceque $CI = IT$, TB ſera auſſi $= BH$; d'où il ſuit que BTH ne rencontre l'Hyperbole qu'en un ſeul point B: car ſi elle la rencontroit en un autre point O; HO (n°. 2.) $= BT$ ſeroit $= BH$. ce qui eſt impoſſible. C'eſt pourquoi TBH touche l'Hyperbole en B. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

8. IL eſt clair que toutes les tangentes, comme *TBH* terminées par les aſymptotes en *T* & *H*, ſont diviſées en deux également par le point touchant *B*.

COROLLAIRE II.

9. IL ſuit auſſi que ſi la poſition de la tangente *TBH*, eſt telle que la ligne menée de l'angle *C* des aſymptotes au point touchant B, diviſe cet angle en deux également, les angles *CBH*, *CBT* ſeront droits, & au contraire: car puiſque les angles *BCG*, *BCI* ſont égaux, le parallelogramme *GI* ſera un rhombe; & partant $CI = CG$; donc *CT* (nº. 6.) double de $CI = CH$ double de *CG*; c'eſt pourquoi les angles *CBH*, *CBT* ſont droits.

COROLLAIRE III.

10. IL ſuit encore que ſi l'angle des aſymptotes *HCT* eſt droit dans toutes les Poſitions de la tangente *TBH*, la ligne *CB* menée de l'angle des aſymptotes au point touchant *B* ſera $= BH = BT$; ſi cet angle eſt aigu, *CB* ſurpaſſera *BH*, ou *BT*; s'il eſt obtus *CB* ſera moindre que *BH*, ou *BT*: car ſi du centre *B* milieu de *HT* l'on décrit un demi cercle ſur le diametre *HT*, le point *C* ſera ſur la circonférence ſi l'angle *HCT* eſt droit; hors du demi cercle, s'il eſt aigu; & dans le demi cercle, s'il eſt obtus; donc au premier cas $CB = BH$ ou *BT*; au ſecond, *CB*, ſurpaſſe *BH*, ou *BT*; & au troiſiéme, elle eſt moindre.

COROLLAIRE IV.

11. IL eſt encore manifeſte que les lignes *LK*, *Mm* paralleles à la tangente *HBT* ſont coupées par le milieu en *P* par la droite *CB* prolongée, car puiſque $BH = BT$, PL ſera $= PK$: mais (nº. 2.) $ML = mK$; donc $PM = Pm$.

PROPOSITION IV.

Problême.

12. *UNE équation à l'Hyperbole* $xy = aa$ *étant donnée, décrire l'Hyperbole.*

On voit par l'équation, qui n'a que deux termes, que l'origine des indéterminées x, & y est au sommet de l'angle des asymptotes.

Soit C l'origine des indéterminées x, qui va vers T, & y qui va vers H, & ayant pris CI & CG chacune $= a$, on achevera le parallelogramme $CGBI$: & l'on décrira (Prop. 1.) l'Hyperbole MBm, entre les asymptotes CT, & CH.

DE'MONSTRATION.

ELLE est évidente par la premiere Proposition.

PROPOSITION V.

Theorême.

FIG. 69. 13. *SOIT une Hyperbole* MBm *dont* CH *&* CT *sont les asymptotes; soit aussi par un point quelconque* B, *menée* (n°. 7.) *une tangente* HBT, *& du point* C *par le point touchant* B *la ligne* CBP. *Si par quelque point* P, *l'on mene* PM *parallele à* HT, *qui rencontre l'Hyperbole aux points* M *&* m, *& les asymptotes en* L *&* K. *Je dis que* $CP^2 - CB^2 . PM^2 :: CB^2 . BH^2$, *ou ce qui revient au même, ayant prolongé* BC *en* A, *& fait* $CA = CB$, *que* $AP \times PB . PM^2 :: AB^2 . TH^2$.

Ayant mené BI, BG, mQ & mN paralleles aux asymptotes, & nommé les données AC, ou CB, a; BH, ou BT, b; CI, ou GB, c; CG, ou IB, d; & les indéterminées CP, x; PM, ou Pm, y; CQ, ou Nm, f; CN ou Qm, z; AP sera $x + a$, & BP, $x - a$.

Il faut prouver que $xx - aa . yy :: aa . bb :: 4aa . 4bb$.

DE'MONSTRATION.

LEs triangles semblables CBT, CPK donnent CB (a). BT (b) :: CP (x). $PK = \frac{bx}{a}$; donc $mK = \frac{bx}{a} - y$, $mL = \frac{bx}{a} + y$; & à cause des triangles semblables TBI, KmQ, & BHG, mLN, l'on a b (TB). d (BI) :: $\frac{bx}{a} - y$ (Km). z (mQ), & b (BH). c (BG) :: $\frac{bx}{a} + y$ (mL). s (mN), d'où l'on tire ces deux équations $bz = \frac{bdx}{a} - dy$, & $bs = \frac{bcx}{a} + cy$, & en multipliant le premier membre de l'une par le premier de l'autre, & le second par le second, l'on a $bbsz = \frac{bbcdxx}{aa} - cdyy$: mais par la premiere Proposition $sz = cd$; donc $bb = \frac{bbxx}{aa} - yy$, en divisant par les quantitez égales sz, & cd; d'où l'on tire $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$; donc $xx - aa . yy :: aa . bb :: 4aa . 4bb$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

14. IL est évident (Art. 9. n°. 7, 11 & 12), & par cette équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, qui est la même que celle du même Article n°. 11, que le point C, est le centre de l'Hyperbole MBm, que AB est l'axe; si l'angle CBH est droit; autrement AB est nommée diametre déterminé; que DE parallele & égale à HT est l'axe, ou le diametre conjugué à AB, que MP & MF sont les ordonnées ou appliquées aux diametres conjuguez AB & DE. De sorte que FP est le parallelogramme des coordonnées. FIG. 70.

COROLLAIRE II.

FIG. 70. 15. L'ÉQUATION précedente $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ donne $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{bb + yy}$, qui fait voir que si l'on prolonge MF en N; en sorte que $FN = FM$, le point N sera à l'Hyperbole; & si l'on fait $y = 0$, la ligne MN se confondra avec la ligne AB, le point F avec le point C, & l'on aura $x = \pm a$, d'où il suit que le point M se confond avec le point B, & le point N avec A; de sorte que $CA = CB$, & que le point A sera à l'Hyperbole.

Si dans la même équation on fait $x = 0$, ayant mené NQ parallele à DE, ou à PM, les points P & Q se confondront avec le point C, & l'on aura $y = \pm \sqrt{-bb}$. Or parceque les valeurs de y sont imaginaires; il suit que l'Hyperbole ne rencontre point le diametre DE, ni de côté ni d'autre du point C. Et parceque l'on tire aussi de la même équation $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{xx - aa}$; il suit que l'Hyperbole rencontre les paralleles MPm, NQn des deux côtez de AB, tant que x (CP, ou CQ) surpasse a (CB ou CA); qu'elle coupe AB en B & A, lorsque $CP = CB$, ou $x = a$: car $xx - aa$ devient $aa - aa = 0$; & par conséquent $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{xx - aa} = 0$; & que lorsque les points P & Q tombent entre A & B, c'est-à-dire, lorsque a surpasse x, l'Hyperbole ne rencontre point les paralleles à DE menées entre A & B : car la quantité $xx - aa$ devient negative, & par conséquent les valeurs de $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{xx - aa}$ deviennent imaginaires. Enfin l'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, fait voir que x (CP, ou CQ) croissant, y (PM, ou QN) croît aussi; c'est pourquoi l'Hyperbole s'éloigne de plus en plus à l'infini du diametre AB prolongé de part & d'autre à l'infini : car il n'y a rien dans l'équation qui empêche d'augmenter x à l'infini, d'où l'on voit que l'Hyperbole a deux parties MBm

& *NAn* oppoſées l'une à l'autre, qui ne ſe rencontrent point & s'étendent à l'infini. Ce ſont ces deux parties de l'Hyperbole que l'on appelle *Hyperboles oppoſées*.

COROLLAIRE III.

16. IL eſt clair que les Hyperboles oppoſées ſont égales & ſemblables; puiſque les coordonnées *NF*, *NQ* de l'une ſont égales aux coordonnées *MF*, *MP* de l'autre.

COROLLAIRE. IV.

17. IL eſt auſſi manifeſte que les Aſymptotes *CH*, *CT* de l'Hyperbole *MBm*, étant prolongées vers *g*, & vers *k*, ſont auſſi les Aſymptotes de l'Hyperbole oppoſée *NAn*; puiſque *Nk* & *ng*, ſont toujours égales à *mK* & *ML*.

COROLLAIRE V.

18. IL eſt encore évident que la ligne *hAt* menée par le point *A* parallele à *DE*, ou *HT*; & qui rencontre les Aſymptotes en *h* & *t*, eſt égale à *HT*, ou à *DE*, & qu'elle touche l'Hyperbole *NAn* en *A*; puiſqu'elle eſt diviſée en deux également en *A*, comme *HT* l'eſt en *B*; & que $CA = CB$.

COROLLAIRE VI.

19. L'ON a (n°. 12.) $ML = \frac{bx}{a} - y$, & $MK = \frac{bx}{a} + y$, l'on a auſſi (n°. 13.) $bb = \frac{bbxx}{aa} - yy = \frac{bx}{a} - y \times \frac{bx}{a} + y$, qui montre que BH^2 $(bb) = KM \times ML$.

COROLLAIRE VII.

20. L'ON tire de l'équation à l'Hyperbole $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ cette autre équation $aa = xx - \frac{aayy}{bb} = x - \frac{ay}{b} \times x + \frac{ay}{b}$:

mais $GM = x - \frac{ay}{b}$, & $MO = x + \frac{ay}{b}$: car les triangles ſemblables HBC, CFG donnent HB (b). BC (a) :: CF ou PM (y). $FG = \frac{ay}{b}$; & partant $GM = FM - FG = x - \frac{ay}{b}$, & $MO = x + \frac{ay}{b}$; d'où il ſuit que $OM \times MG \left(xx - \frac{aayy}{bb} \right) = CB^2 \, (aa)$.

DÉFINITIONS.

21. SI l'on décrit (Prop. 1.) dans les angles HCt, TCh par les extrêmitez D & E du diametre DE conjugué au diametre AB, les Hyperboles oppoſées RDS, $rEſ$, ces Hyperboles ſeront nommées *conjuguées* aux Hyperboles oppoſées MBm, NAn.

COROLLAIRE VIII.

22. IL eſt clair que les lignes Ht, Th paſſeront par les points D & E, & qu'elles toucheront en ces points les Hyperboles RDS, $rEſ$, puiſqu'elles y ſont diviſées par le milieu, comme AB, à qui elles ſont paralleles & égales, l'eſt en C.

COROLLAIRE IX.

23. D'OÙ il ſuit que DE & AB ſont les axes conjuguez des Hyperboles RDS, $rEſ$, ſi DE eſt perpendiculaire à AB; autrement, elles en ſont deux diametres conjuguez.

AVERTISSEMENT.

24. *IL n'eſt point neceſſaire de démontrer que les Hyperboles* RDS, rEſ, *ont les mêmes proprietez que les Hyperboles* MBm, NAn; *puiſque ce ne ſeroit qu'une répétition inutile.*

DÉFINITION.

DÉFINITION.

25. SI l'on fait $a . b :: 2b . \frac{2bb}{a}$ que je nomme p, la ligne égale à p, eſt appellée *le parametre* du diametre AB.

COROLLAIRE X.

26. $a . b :: 2b . p$, donne $ap = 2bb$, ou $aap = 2abb$; d'où l'on tire $\frac{2a}{p} = \frac{aa}{bb}$; c'eſt pourquoi, ſi dans l'équation à l'Hyperbole $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$; au lieu de $\frac{aa}{bb}$, l'on met ſa valeur $\frac{2a}{p}$, l'on aura $xx - aa = \frac{2ayy}{p}$, d'où l'on tire $xx - aa . yy :: 2a . p$, & ſi l'on met en la place de $\frac{aa}{bb}$ un autre raport égal $\frac{m}{n}$ l'on aura $xx - aa = \frac{myy}{n}$. On ajoutera à ce Corollaire ce qu'on a dit (Art. 12. n°. 9. 10. 11. & 12.)

COROLLAIRE XI.

27. SI l'on avoit nommé (n°. 12.) BP, x; AP auroit été $2a + x$, & l'on auroit trouvé cette équation $2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$, qui montre que lorſque les indéterminées n'ont point leur origine au centre de l'Hyperbole, il ſe trouve des ſeconds termes dans ſon équation.

COROLLAIRE XII.

28. SI dans l'équation à l'Hyperbole $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ ou $2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$, a eſt $= b$, ces deux équations deviendroient les deux ſuivantes $xx - aa = yy$, & $2ax +$

$xx = yy$, c'eſt-à-dire, qu'alors $AP \times PB = PM^2$; les diametres conjuguez AB, DE ſeront égaux; (n°. 9.) les aſymptotes à angles droits; & tous les diametres égaux à leurs parametres.

L'on remarquera que ces deux équations à l'Hyperbole ne different de celle du cercle, & les deux premieres de celle de l'Ellipſe, qu'en ce que les deux quarrez inconnus, ont un même ſigne lorſque l'un eſt dans un membre de l'équation, & l'autre dans l'autre; ou differens ſignes, lorſqu'ils ſont tous deux dans un même membre, & c'eſt le contraire dans celle du cercle, & de l'Ellipſe, comme on a remarqué (Art. 12. n°. 13.); d'où l'on conclura qu'une équation locale appartiendra toujours à l'Hyperbole, quelque mêlange de conſtantes qu'il s'y puiſſe rencontrer, lorſque les quarrez des deux lettres indéterminées auront un même ſigne, l'un étant dans un membre de l'équation & l'autre dans l'autre, ou des ſignes differens, étant tous deux dans le même membre; & ſouvent même lorſque les indéterminées s'y trouveront multipliées l'une par l'autre. Je dis ſouvent: car il y a des exceptions à faire qu'on trouvera dans la ſuite.

DÉFINITION.

29. L'HYPERBOLE qui a ſes aſymptotes à angles droits, ou (n°. 9.) ce qui revient au même, dont les diametres ſont égaux entr'eux & à leurs parametres, eſt appellée *Hyperbole équilatere*; parceque l'axe d'une Section conique eſt appellé par Apollonius, *latus tranſverſum*, & ſon parametre, *latus rectum*.

PROPOSITION VI.

30. *UNE équation à l'Hyperbole* $xx + cc - dd = \frac{myy}{n}$, *étant donnée, décrire l'Hyperbole.*

FIG. 70. Soit C l'origine des inconnues x qui va vers P, & y qui va vers F, & qui font un angle quelconque FCP, le

point C ſera auſſi le centre de l'Hyperbole; puiſqu'il n'y a point de ſecond terme dans l'équation. En ſuppoſant 1°. Que d ſurpaſſe c; ſoit $ff = dd - cc$, & mettant dans l'équation en la place de $dd - cc$ ſa valeur ff, elle deviendra $xx - ff = \frac{myy}{n}$. Soit pris $CB = f$; CB ſera (n°. 13.) le demi diametre de l'hyperbole qu'il faut décrire. Soit fait $m . n :: ff . \frac{nff}{m}$; $\sqrt{\frac{nff}{m}}$ ſera (Art. 12. n°. 12.) le demi diametre conjugué CD. Ayant mené par B la ligne HBT parallele à CD, & fait BH & BT chacune égale à $\sqrt{\frac{nff}{m}}$; $= CD$; l'on menera les lignes CHL, CTK du centre C par les points H & T qui ſeront (n°. 13.) les aſymptotes, & l'on décrira l'Hyperbole (Prop. 1.) par le point B.

DE'MONSTRATION.

ELLE eſt évidente par les Art. & n°. que l'on vient de citer.

30. En ſuppoſant 2°. Que c ſurpaſſe d, ſoit fait $gg = cc - dd$, & mettant dans l'équation en la place de $cc - dd$ ſa valeur gg, l'on aura $xx + gg = \frac{myy}{n}$: mais parceque cette équation n'exprime point dans l'état où elle eſt, la proprieté de l'hyperbole démontrée (n°. 13.) ou dans la Prop. 5: car $xx + gg$ n'eſt point égal à $AP \times PB$; il faut la changer en celle-ci $\frac{nxx}{m} = yy - \frac{ngg}{m}$ en multipliant par n, diviſant par m, & tranſpoſant, qui montre que le demi diametre exprimé par $\sqrt{\frac{ngg}{m}}$ doit être pris ſur CF exprimé par y. Ayant donc pris $CD = \sqrt{\frac{ngg}{m}}$; & fait $n . m :: \frac{ngg}{m} . gg$, g ſera le demi diametre conjugué à CD; ſi l'on mene préſentement par D la ligne tDH parallele à CB, & qu'on faſſe tD & DH chacune $= g$; les lignes menées du centre C par t & par H, ſeront les aſymptotes; & l'on décrira l'hyperbole par le point D.

DE'MONSTRATION.

Elle eſt la même que la précédente.

PROPOSITION VII.

Theorême.

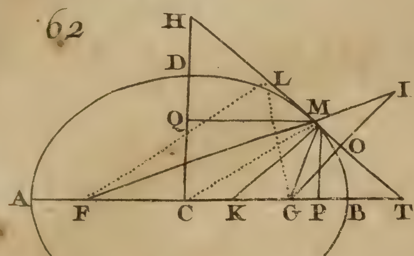
FIG. 71. 31. *Une Hyperbole* BM, *dont* C *eſt le centre*; AB *&* DE *les deux axes, ou deux diametres conjuguez quelconques; &* CH, CT, *les aſymptotes, étant donnée. Si l'on mene* (n°. 6.) *par un point quelconque* M *autre que* B *la tangente* EMF, *qui rencontre les aſymptotes en* E *&* F. *Je dis qu'elle rencontrera le diametre* AB *en un point* L, *qui ſera ſitué entre le centre* C, *& l'extrèmité* B *du même diametre* AB; *& que* CP . CB :: CB . CL.

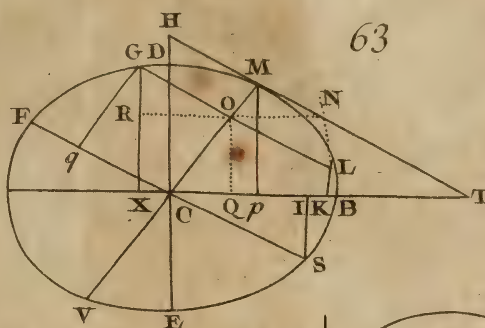
Ayant mené par M les droites PMK parallele à DE, ou HT; MO, parallele à CB; MI, parallele à CH, & par le point B, les droites BG, BN paralleles aux aſymptotes CT, CH, & nommé les données & conſtantes CB, ou CA, a; CD, ou BH; ou BT, b; BG, ou CN, c; BN, ou CG, d; & les indéterminées CP, x; PM, y; CI, ou (n°. 6.) IE, f; MI, z, & CL, t.

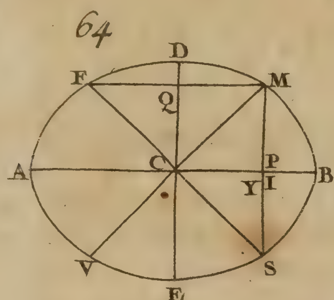
Il faut prouver que $x . a :: a . t$.

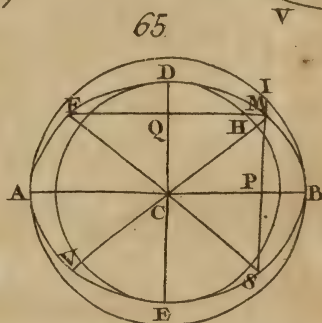
DE'MONSTRATION.

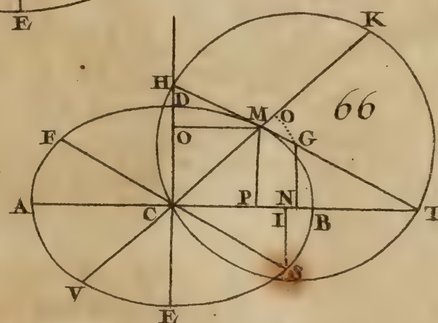
Les triangles ſemblables CBT, CPK donnent $CB(a)$. $BT(b) :: CP(x) . PK = \frac{bx}{a}$; donc $MK = \frac{bx}{a} - y$. Les triangles ſemblables TBN, KMI, donnent $b(TB)$. $d(BN) :: \frac{bx}{a} - y(KM) . z(MI)$, d'où l'on tire $z = \frac{bdx - ady}{ab}$. Les triangles ſemblables BNC, MIO donnent $BN(d) . NC(c) :: MI(z) . IO = \frac{cz}{d}$; donc $EO =$

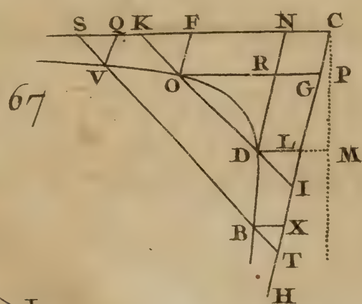

62
H
D
L
M
I
Q
O
A
F
C
K
G
P
B
T

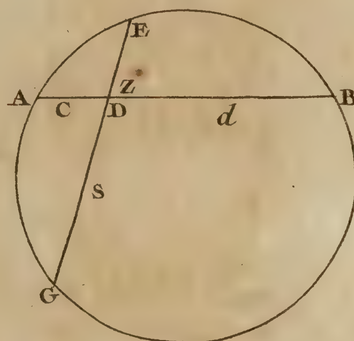

H
63
G D
M
N
F
R
O
q
L
T
X
C
Q p
I K B
S
V
E

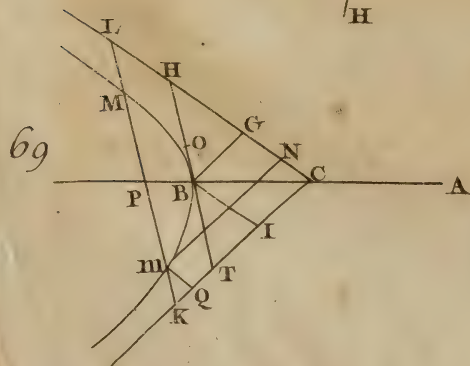

64
D
F
M
Q
A
C
P
B
Y I
V
S
E

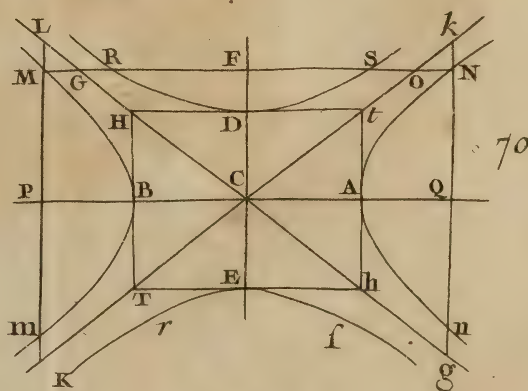

65
D
I
F
M
Q
H
A
P
B
C
V
S
E

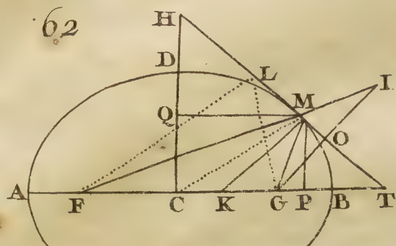

K
H
D
M
O
66
F
O
G
A
C
P
N
T
I
B
V
S
E

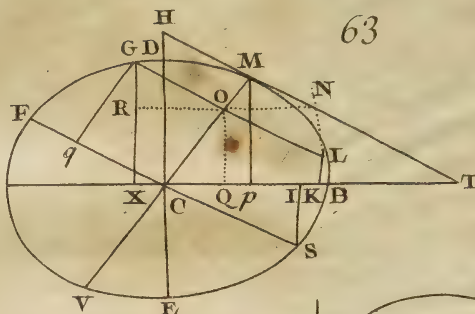

S
Q
K
F
N
C
V
O
R
P
G
67
D
L
M
I
B
X
T
H

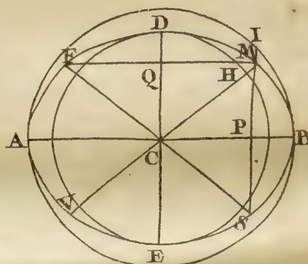

E
A
Z
B
C
D
d
68
S
G

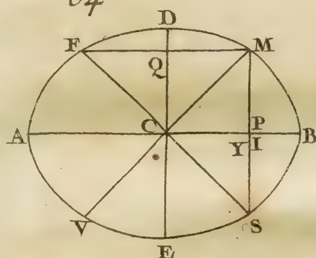

L
H
M
G
69
O
N
P
B
C
A
I
m
T
Q
K

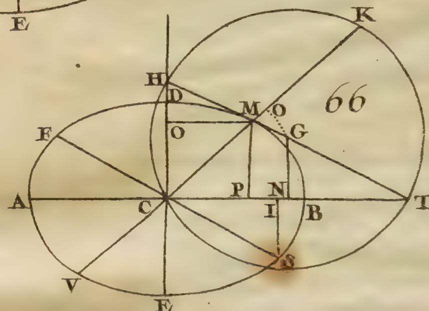

L
k
R
F
S
M
G
O
N
H
D
t
70
P
B
C
A
Q
E
h
T
m
r
ſ
n
K
g

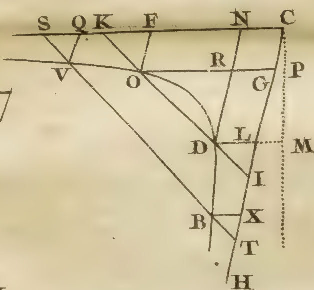

62
H
D
L
I
M
Q
O
A
F
C
K
G
P
B
T

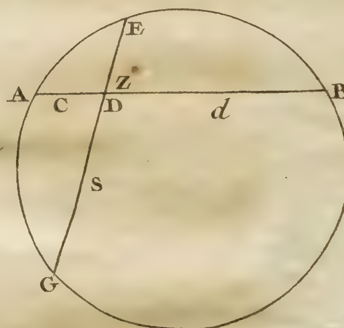

H
63
G D
M
N
F
R
O
q
L
T
X
C
Q p
I K B
S
V
E

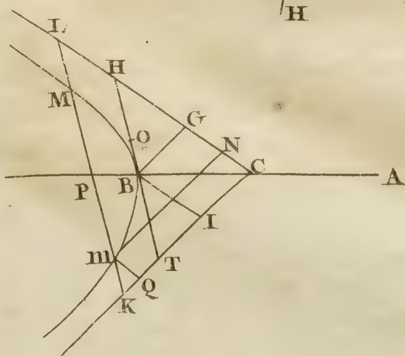

65
D
I
F
M
Q
H
A
P
B
C
V
S
E

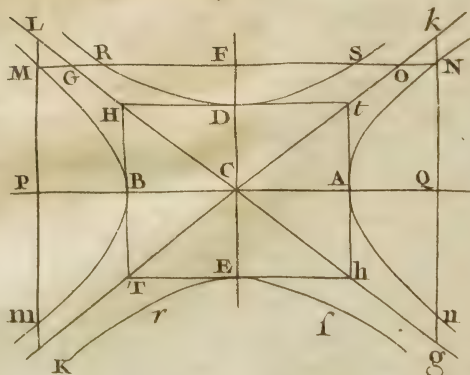

64
D
F
M
Q
A
C
P
B
Y
I
V
S
E


K
H
D
M
O
66
G
F
O
A
C
P
N
T
I
B
V
S
E


S Q K F N C
R
P
V
O
G
67
D
L
M
I
B
X
T
H


E
Z
A
C
D
d
B
68
S
G


L
H
M
G
O
N
69
C
A
P
B
I
m
T
Q
K


L
k
R
F
S
M
G
O
N
H
D
t
70
P
B
C
A
Q
E
h
T
m
r
ſ
n
K
g

$EI + IO = \int + \frac{cz}{d}$; & $BN(d). BC(a) :: MI(z). MO$ $= \frac{az}{d}$. Enfin les triangles ſemblables EOM, ECL donnent $\int + \frac{cz}{d} (EO). \frac{az}{d} (OM) :: 2\int (EC). t (CL)$, d'où l'on tire $t = \frac{2a\int z}{d\int + cz}$: mais (Prop. 1.) $\int z = cd$, & $\int = \frac{cd}{z}$, c'eſt pourquoi en mettant ces valeurs de $\int$ & de $\int z$ dans celle de t, l'on aura $t = \frac{2adz}{dd + zz}$. Or l'on vient de trouver $z = \frac{bdx - ady}{ab}$; mettant donc cette valeur de z, & celle de ſon quarré dans la précedente valeur de t, l'on aura après les réductions $t = \frac{2aabbx - 2a^3by}{aabb + bbxx - 2abxy + aayy}$: mais (Prop. 5.) $aayy = bbxx - aabb$; c'eſt pourquoi en mettant cette valeur de $aayy$ dans la derniere de t, l'on aura après les réductions, $t = \frac{aa}{x}$; d'où l'on tire $x . a :: a . t$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

32. Il eſt clair qu'on peut par ce moyen, d'un point quelconque donné ſur l'Hyperbole, mener une tangente ſans le ſecours des aſymptotes, en prenant CL troiſiéme proportionnelle à CP & à CB.

COROLLAIRE II.

33. Si de $CP (x)$ l'on ôte $CL \left(\frac{aa}{x}\right)$, l'on aura $PL = \frac{xx - aa}{x}$ pour l'expreſſion de la ſoutangente PL.

COROLLAIRE III.

34. Si de $CB (a)$ l'on ôte $CL \left(\frac{aa}{x}\right)$, l'on aura BL $\frac{ax - aa}{x}$, ou ſi l'on ſuppoſe que $CP (x)$ devienne infi-

niment grande, le point touchant M sera infiniment éloigné de B; & effaçant le terme $-aa$ dans l'expression de BL; parcequ'alors il devient nul par raport à ax, l'on aura $BL = \frac{ax}{x} = a$; d'où il suit que le point L tombe en C, & la tangente LM devient CE qui est l'asymptote de l'Hyperbole.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

FIG. 72. 35. *UNE Hyperbole* BM, *dont* C *est le centre*; AB *&* DE, *les axes conjuguez, étant donnée*; *si l'on fait* CF *&* CG *chacune égale à l'intervalle* BD, *ou* BE, *& que l'on mene d'un point quelconque* M, *pris sur l'Hyperbole, les droites* MF, MG, *& (* n°. 32. *) la tangente* ML. *Je dis que l'angle* LMF *sera égal à l'angle* LMG.

Ayant mené l'appliquée MP perpendiculaire à l'axe AB, & nommé CB, ou CA, a; CD, ou CE, b; CF, ou CG, ou BD, c; MF, z; MG, s; CP, x; PM, y; PF sera, $x-c$; PG, $x+c$; & CL (n°. 31.) $\frac{aa}{x}$, donc $FL = c - \frac{aa}{x}$, ou $\frac{cx-aa}{x}$, & $GL = c + \frac{aa}{x}$, ou $\frac{cx+aa}{x}$.

Il faut prouver que $MF\ (z) . MG\ (s) :: FL \left(\frac{cx-aa}{x}\right) . GL \left(\frac{cx+aa}{x}\right) :: cx-aa . cx+aa$.

DE'MONSTRATION.

LEs triangles rectangles FPM & GPM donnent

$A.\ xx - 2cx + cc + yy = zz$, &

$B.\ xx + 2cx + cc + yy = ss$: mais (Prop. 4.)

$C.\ yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$, & le triangle rectangle BCD donne

$bb = cc - aa$, mettant donc cette valeur de bb dans l'équation C, l'on a $yy = \frac{ccxx - aaxx - aacc + a^4}{aa}$, & mettant cette valeur de yy dans les deux équations A, & B, l'on aura après les réductions & extractions de racines, $cx - aa = az$, & $cx + aa = as$; donc $cx - aa . cx + aa :: az . as :: z . s$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE

36. D'Où l'on voit que si l'un des points F, ou G étoit un point lumineux, les prolongemens des rayons réfléchis à la rencontre de l'Hyperbole se réuniroient à l'autre point G ou F.

DÉFINITION.

37. Les points F & G sont appellez les *foyers* de l'Hyperbole.



SECTION VIII.

Où l'on donne la méthode de résoudre les Problêmes indéterminez du premier & du second degré, c'est-à-dire, de construire les équations à la ligne droite, & aux quatre courbes du premier genre, qui sont le Cercle, la Parabole, l'Ellipse & l'Hyperbole.

MÉTHODE.

XV. L'On a vû dans les Sections précédentes 1°. Que les équations indéterminées, ou les lettres inconnues qui ne sont multipliées ni par elles-mêmes ni entr'elles, appartiennent à la ligne droite, & que lorsque ces équations n'ont que deux termes, comme celle-ci $ay = bx$, ou $x = y$; les inconnues x & y ont leur origine au point d'intersection de deux lignes droites, dont l'une renferme tous les points qui satisfont au Problême, & l'autre, tous les points d'où menant des lignes paralleles à quelque ligne donnée, & terminées par la premiere, la construction du Problême se trouve faite.

2°. Que lorsqu'une équation à la parabole n'a que deux termes, l'un desquels est le quarré de l'une des inconnues, & l'autre, le produit de l'autre inconnue par une quantité connue, comme $ax = yy$; les inconnues x, & y ont leur origine au sommet de l'axe, ou d'un diametre exprimé par x, & que lorsqu'elle a plus de deux termes, l'origine des inconnues n'est point au sommet d'un diametre.

3°. Que lorsqu'une équation au cercle, ou à l'Ellipse, ou aux diametres de l'Hyperbole, n'a que trois termes, deux desquels renferment les quarrez des deux inconnues, & le troisiéme est entierement connu, comme $aa - xx =$

yy, $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, ou $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, les inconnues x & y ont leur origine au centre de ces trois Courbes, & que lorſque ces équations ont des ſeconds termes, l'origine des inconnues n'eſt point au centre.

4°. Que lorſqu'une équation aux aſymptotes d'une Hyperbole n'a que deux termes dont l'un eſt le produit des deux indéterminées, & l'autre un Plan connu comme $xy = ab$, l'origine des inconnues x & y eſt au ſommet de l'angle des aſymptotes, & que lorſque cette équation a plus de deux termes, l'origine des inconnues eſt ailleurs ; où l'on remarquera que les quantitez conſtantes, quelque compoſées qu'elles ſe puiſſent rencontrer, ne changent rien de ce que nous venons de dire ; puiſque l'on peut toujours mettre en leur place des valeurs ſimples : par exemple cette équation $\frac{a^4 - b^4}{cc} - xx = yy$, eſt une équation au cercle dont le centre eſt l'origine des indéterminées : car on peut trouver (Art. 5.) une quantité ſimple $dd = \frac{a^4 - b^4}{cc}$; de ſorte que mettant dd dans l'équation précédente en la place de $\frac{a^4 - b^4}{cc}$ elle deviendra $dd - xx = yy$. Il en eſt ainſi des autres.

Nous avons donné dans les Sections précédentes la maniere de conſtruire les équations indéterminées du ſecond degré, c'eſt-à-dire, de décrire les quatre courbes du premier genre par le moyen de leurs équations : mais ces équations étoient dans l'état où nous les venons de propoſer ; c'eſt-à-dire que l'équation à la ligne droite, à la parabole, & aux aſymptotes de l'Hyperbole, n'avoit que deux termes ; l'équation au cercle, à l'Ellipſe, & aux diametres de l'Hyperbole, n'avoit que trois termes parmi leſquels il n'y en avoit point de ſecond : mais lorſqu'on réſout un Problême, les équations où l'on arrive ne ſont pas toujours, ou plûtôt, ſont rarement dans

cet état. Ce qu'il y a de conſtant, c'eſt que lorſque les lettres indéterminées n'auront pas plus de deux dimenſions, ſoit qu'elles ſoient multipliées par elles-mêmes, ou entr'elles, les équations appartiendront toujours à une des quatre Courbes du premier genre. Il eſt même très-ſouvent facile de reconnoitre par la ſeule inſpection d'une équation à laquelle des quatre elle appartient, par ce que l'on a dit ailleurs, & il n'y a qu'un Cas où l'on puiſſe ſe méprendre, qui eſt lorſqu'une équation renferme deux quarrez inconnus, & que le produit des deux lettres inconnues ſe rencontre encore dans quelqu'un de ſes termes: car ces équations appartiennent ſouvent à l'hyperbole, & quelquefois au cercle, ou à la parabole, ou à l'Ellipſe: mais lorſqu'il n'y a qu'un quarré inconnu, & que le produit des deux inconnues ſe trouve dans un autre terme, l'équation appartiendra toujours à l'hyperbole, & il ſera libre de la réduire aux diametres, ou aux aſymptotes, comme on va bien-tôt voir.

Il ſuit de tout ceci que pour conſtruire les équations qui ne ſont point dans l'état des précédentes, c'eſt-à-dire, pour décrire les Courbes auſquelles elles appartiennent, ou il faut donner d'autres régles que celles des trois Sections précédentes, ou il faut donner des régles pour ramener ces équations à l'état où ſont celles des mêmes Sections, afin de ſe ſervir des mêmes régles dont on s'y eſt ſervi pour décrire ces Courbes: mais comme il va paroître un Livre de Monſieur le Marquis de l'Hôpital (pour l'intelligence duquel celui-ci ne ſera peut-être pas inutile) dans lequel on trouvera des Méthodes de conſtruire les équations indéterminées, telles qu'on les trouve en reſolvant les Problêmes, on a jugé à propos de prendre le parti de ramener les équations indéterminées qui n'excedent point le deuxiéme degré, à l'état de celles par le moyen deſquelles nous avons décrit les Sections coniques dans les trois Sections précédentes. Les moyens dont on ſe ſert pour changer d'état ces équations, ſont nommées *réductions*.

DES RÉDUCTIONS

Des Equations indéterminées du premier & du second degré.

1. IL n'y a que deux choſes qui empêchent les équations indéterminées du ſecond degré, d'être ſemblables, ou dans le même état de celles par le moyen deſquelles nous avons décrit les Courbes auſquelles elles appartiennent dans les trois Sections précédentes. Ces deux choſes ſont les ſeconds termes, & les rectangles compoſez; de ſorte que pour les réduire, il n'y a qu'à faire évanouir par les régles ordinaires les ſeconds termes, & changer les rectangles, ou produits compoſez en des rectangles, ou des produits ſimples.

J'appelle rectangle compoſé, le produit d'une lettre ou quantité connue, ou inconnue, par une lettre inconnue accompagnée par addition, ou ſouſtraction d'une autre lettre ou quantité connue ſimple, ou compoſée. Par exemple $ay + xy$, eſt un rectangle compoſé de $a \pm x \times y$; $aa \pm ay$, eſt un rectangle compoſé $a \pm y \times a$; $\frac{aax \pm axy}{b}$, eſt un rectangle compoſé de $\frac{aa \pm ay}{b} \times x$; $ay \pm by \pm xy$, eſt compoſé de $a \pm b \pm x \times y$. Il en eſt ainſi des autres.

2. Il y a quelquefois quelque changement à faire pour rendre des quantitez complexes ſemblables aux rectangles compoſez dont nous venons de parler. Par exemple $aa - by$, n'eſt point le produit d'une quantité ſimple par une quantité complexe: car pour cela, il faudroit qu'il y eut un b dans le premier terme aa; c'eſt pourquoi il faut (Art. 5.) changer aa en un rectangle dont un côté ſoit b, comme en bc, & mettant bc en la place de aa, l'on aura $bc - by = c - y \times b$. Il en eſt ainſi des autres.

Il y a des équations, où il n'y a qu'à ôter les ſeconds termes pour les réduire: il y en a d'autres où il n'y a qu'à changer les produits compoſez en des produits ſimples,

& il y en a d'autres où il y a toutes ces deux choſes à faire. Les exemples ſuivans ne laiſſeront rien à éclaircir ſur ce ſujet.

EXEMPLES.

De la réduction des Equations en faiſant évanouir les ſeconds termes.

3. ON ſçait que la régle de faire évanouir le ſecond terme d'une équation, eſt d'égaler la racine du premier + ou — le coefficient du ſecond diviſé par l'expoſant du premier à une nouvelle inconnue, ce qui donne une équation que j'appelle *réduction*; d'où l'on tire une valeur de l'inconnue qui eſt la racine du premier terme de l'équation à réduire; & ſubſtituant cette valeur, & celle de ſes puiſſances dans l'équation à réduire, elle ſe change en une autre équation, où l'inconnue dont on vouloit faire évanouir le ſecond terme, ne ſe trouve plus, mais il ſe trouve en ſa place la nouvelle inconnue de la réduction, dont le premier terme eſt élevé à la même puiſſance que celui de l'inconnue que l'on a fait évanouir: mais qui n'en a point de ſecond. Ceci eſt général pour les équations de tous les degrez, quoiqu'il ne ſoit ici queſtion que des équations du ſecond.

EXEMPLE I.

4. SOIT l'équation $xx - ax + yy = by$. Il eſt clair que cette équation appartient au cercle, puiſqu'elle renferme deux quarrez inconnus xx & yy qui ont le même ſigne + étant tous deux dans un même membre de l'équation: mais les inconnues n'ont point leur origine au centre: car les deux quarrez inconnus xx & yy ont chacun un ſecond terme ax & by. Pour faire évanouir le ſecond terme $-ax$, je fais $x - \frac{1}{2}a = z$; donc $x = z + \frac{1}{2}a$, & mettant cette valeur de x, & celle de ſon quarré dans l'équation, elle deviendra $zz - \frac{1}{4}aa + yy = by$, où zz eſt un premier terme qui n'en a point de ſecond. Pour faire

évanouir le ſecond terme by, je le paſſe du côté de ſon premier yy, afin que yy garde ſon ſigne $+$; ainſi l'équation devient $zz - \frac{1}{4} aa + yy - by = 0$; & faiſant $y - \frac{1}{2} b = u$, l'on a $y = u + \frac{1}{2} b$; & mettant cette valeur de y & celle de ſon quarré dans l'équation en la place de y & de yy, l'on aura $zz - \frac{1}{4} aa + uu - \frac{1}{4} bb = 0$, ou $zz = \frac{1}{4} aa + \frac{1}{4} bb - uu$, qui montreroit que cette équation appartient au cercle ſi on ne l'avoit pas connu d'abord, & qui montre que les inconnues z & u ont leur origine au centre; puiſque ni l'une, ni l'autre n'ont point de ſecond terme. Le demi diametre de ce cercle eſt égal à $\sqrt{\frac{1}{4} aa + \frac{1}{4} bb}$.

EXEMPLE II.

5. SOIT une équation $xx + bx - 2ax - yy = 0$. On voit déja que cette équation eſt à une Hyperbole équilatere; puiſqu'elle renferme deux quarrez inconnus avec differens ſignes dans un même membre, & délivrez de toute quantité connue; en faiſant $x + \frac{1}{2} b - a = z$, l'on aura $x = z - \frac{1}{2} b + a$, & après les ſubſtitutions l'on aura $zz - \frac{1}{4} bb + ab - aa - yy = 0$, ou $zz - \frac{1}{4} bb + ab - aa = yy$: mais ſi $\frac{1}{2} b$ ſurpaſſe a il faudra tranſpoſer le terme connu: car en ce cas il eſt poſitif, & dans l'équation à l'Hyperbole il doit être négatif; ainſi l'équation ſera $zz = yy + \frac{1}{4} bb - ab + aa$, où les inconnues z & y ont leur origine au centre de l'Hyperbole, dont les demi diametres conjuguez ſont égaux entr'eux & à $\frac{1}{2} b - a$, ou $a - \frac{1}{2} b$.

EXEMPLE III.

6. SOIT $xx - 2xy + by = 0$, qui eſt une équation où il y a un ſecond terme $2xy$ qui peut appartenir indifferemment aux deux premiers: mais parceque le quarré de y ne s'y trouve point, il faut néceſſairement le rapporter à xx;

faisant donc $x - y = z$, l'équation se réduira à $zz - yy + by = 0$: mais la réduction a fait naître un premier terme yy qui a pour second by ; c'est pourquoi en transposant pour donner à yy le signe +, l'on a $zz = yy - by$, & faisant $y - \frac{1}{2} b = u$; l'équation se réduira à $zz = uu - \frac{1}{2} bb$, qui est une équation à l'Hyperbole équilatere, où les inconnues z & u ont leur origine au centre.

EXEMPLE IV.

7. SOIT $xx - 2xy - aa + 2yy = 0$, en faisant $x - y = z$, l'équation se réduit à celle-ci $zz - yy - aa + 2yy = 0$, ou $zz - aa + yy = 0$, qui est une équation au cercle, si les inconnues z & y font un angle droit ; à l'Ellipse, s'il est oblique.

Si dans l'équation à réduire $xx - 2xy - aa + 2yy$, au lieu de $2yy$, il y avoit $-yy$; ou $-2yy$ &c, elle appartiendroit à l'Hyperbole dont les diametres ne sont point égaux ; s'il y avoit $+3yy$ ou $+4yy$ &c, elle appartiendroit à l'Ellipse ; & si au lieu de $2yy$, il y avoit $\pm by + yy$, elle appartiendroit à la parabole.

EXEMPLES.

Des réductions en changeant les produits composez en produits simples.

ON réduit en changeant les produits composez en des produits simples, toutes les équations où il n'y a point de quarrez inconnus, qui sont celles qui appartiennent à la ligne droite, ou aux asymptotes de l'Hyperbole ; celles où il n'y a qu'un quarré inconnu sans le produit des inconnues, qui appartiennent toutes à la parabole ; & celles où il n'y a qu'un quarré inconnu avec un produit des deux inconnues, qui appartiennent toutes à l'Hyperbole. On pourroit aussi réduire ces dernieres, en faisant évanouir le second terme, comme on a fait (n°. 6.) auquel cas elles appartiendroient aux diametres de l'Hyperbole : mais en les réduisant en changeant les rectangles composez en de

ſimples, elles ſe rapporteront aux aſymptotes. Toutes ces équations ne ſeront point entiérement réduites par cette ſeconde maniere de réduction, que lorſqu'elles ne renfermeront que deux termes.

EXEMPLE V.

8. SOIT l'équation, $x + y = a$, ou $x = a - y$, en faiſant $a - y = z$, l'on aura $x = z$ qui eſt un lieu à la ligne droite. Si l'on fait $x + y = z$, l'on aura $z = a$, qui eſt auſſi un lieu à la ligne droite: mais les deux inconnues d'une équation ne ſe doivent pas trouver dans une réduction quand on peut faire autrement.

Soit l'équation $x - y = a - c$, ou $x = a - c + y$: en faiſant $a - c + y = z$, l'on aura $x = z$.

EXEMPLE VI.

9. SOIT l'équation $ax - by = aa$, ou $ax = aa + by$, ou $ax = bc + by$, en mettant bc pour aa, ayant fait $c + y = z$, l'on aura $ax = bz$, qui eſt un lieu à la ligne droite.

EXEMPLE VII.

10. SOIT l'équation $ax - xy = by$, en faiſant $a - y = z$, l'on a $y = a - z$; & mettant cette valeur de y dans l'équation à réduire, l'on aura $xz = ab - bz$ qui a encore trois termes; c'eſt pourquoi, en tranſpoſant, l'on a $xz + bz = ab$: & faiſant $x + b = u$, l'on a $uz = ab$, qui eſt une équation aux aſymptotes de l'Hyperbole.

EXEMPLE VIII.

11. SOIT $abx = bcy + axy$; parceque dans les équations où il n'y a point de quarré inconnu, c'eſt le produit des deux inconnues qui en détermine le degré, il faut, avant que de les réduire, délivrer ce produit de toute quantité connue; c'eſt pourquoi en diviſant toute l'équation par a, l'on aura $bx = \frac{bcy}{a} + xy$, & faiſant

$\frac{bc}{a} + x = z$, l'on a $x = z - \frac{bc}{a}$, & mettant cette valeur de x dans l'équation à réduire, l'on aura $bz - \frac{bbc}{a} = zy$, ou $bz - zy = \frac{bbc}{a}$; & faisant encore $b - y = u$, l'on aura $zu = \frac{bbc}{a}$, qui est un lieu aux asymptotes de l'Hyberbole.

EXEMPLE IX.

12. SOIT l'équation $xx - ax = by$, pour faire évanouir le second terme, on fera $x - \frac{1}{2}a = z$, & l'on aura $zz - \frac{1}{4}aa = by$, ou $zz = \frac{1}{4}aa + by$, ou $zz = bc + by$, en mettant bc pour $\frac{1}{4}aa$, & faisant encore $c + y = u$, l'on aura $zz = bu$, qui est un lieu à la parabole dont le parametre est b.

EXEMPLE X.

13. SOIT l'équation $xx \pm xy = ab$. On peut réduire cette équation en faisant évanouir le second terme, & elle se rapportera aux diametres de l'Hyperbole : car faisant $x \pm \frac{1}{2}y = z$, l'on aura $zz - \frac{1}{4}yy = ab$, ou $zz - ab = \frac{1}{4}yy$. Mais parceque $xx \pm xy = x \times x \pm y$, en faisant $x \pm y = z$, l'on aura $zx = ab$ qui se rapporte aux asymptotes.

EXEMPLE XI.

14. SOIT $xx - xy = by$, on pourroit encore réduire cette équation en faisant évanouir les seconds termes, & elle se rapporteroit aux diametres de l'Hyperbole : mais on peut aussi la réduire aux asymptotes comme l'on a fait la précédente : car en transposant, l'on a $xx = by + xy$; & faisant $x + b = z$, l'on a $x = z - b$, & mettant cette valeur de x dans l'équation à réduire, l'on aura $zz - 2bz + bb = zy$, ou $zy + 2bz - zz = bb$, & faisant $y + 2b - z = u$, l'on aura $uz = bb$, qui se rapporte aux asymptotes.

Voyez l'article 22. n°. 9.

CONSTRUCTION

CONSTRUCTION DES RE'DUCTIONS.

XVI. EN réduisant les équations indéterminées, l'on en forme d'autres plus simples, que nous avons nommées Réductions. Et comme c'est par le moyen de ces Réductions que l'on construit les premieres, l'on a jugé à propos d'en donner ici la construction en particulier pour avoir plus de facilité à construire les autres.

Toutes les Réductions se peuvent rapporter à quelqu'une des six Formules suivantes, où a, b & c expriment des quantitez connues quelconques complexes, ou incomplexes.

1. $x \pm a = z$	4. $x \pm \frac{ay}{b} = z$
2. $a - x = z$	5. $x \pm y \pm b = z$
3. $x \pm y = z$	6. $x \pm \frac{ay}{b} \pm c = z$

CONSTRUCTION

De la premiere Formule $x \pm a = z$.

1. SOIT A le point fixe, ou l'origine des inconnues x, qui va vers H, & y qui va vers G, & qui forment l'angle GAH tel qu'il doit être selon les qualitez du Problême, dont on suppose ici que l'on fait la construction. 1°. Si la Réduction est $x + a = z$, il est clair que la construction se doit faire sur la ligne AH exprimée par x, & que pour avoir sur AH indéfiniment prolongée vers H une ligne égale à z, il faut prolonger AH du côté de A en C, en sorte que $AC = a$: car l'on aura alors $CA + AH = a + x = z$; & ainsi le point C sera alors l'origine, ou le commencement de z qui va vers H, & de y qui va vers g, en demeurant toujours parallele à AG, de sorte que s'il n'y avoit point de Réduction pour y, le point C seroit l'origine des inconnues de l'équation réduite, dont celle que l'on vient de construire est une Réduction. FIG. 73.

FIG. 74. 2. Si la Réduction est $x - a = z$, l'on prendra le point C du côté de H par raport à A, & l'on fera $AC = a$; & le point C sera le commencement de z qui va toujours vers H, & de y qui va vers g parallele à AG; car alors $AH - AC = CH = x - a = z$; & s'il n'y avoit point de réduction pour y, le point C seroit l'origine des inconnues de l'équation réduite.

FIG. 73. 74. 3. Mais si dans l'un ou dans l'autre, ou dans tous les deux Cas précédens, il y a une réduction pour y semblable à la précédente, par exemple, $y \pm b = u$ l'on fera sur Cg ce que l'on vient de faire sur AH, c'est-à-dre, que s'il y a $y + b = u$, on prolongera Cg en O; & s'il y a $y - b = u$, l'on retranchera Co de Cg, en faisant CO, ou $Co = b$; & le point O, ou o sera l'origine des inconnues de l'équation réduite u qui va toujours vers g, & z qui va vers M, ou m parallele à CH; de sorte que les nouvelles inconnues z & u font le même angle au point O, ou o que les premieres x & y au point A, qui est leur origine.

CONTRUCTION

De la seconde Formule a — x = z.

4. L'ON voit par la seule inspection de cette Formule que les deux inconnues x & z sont ensemble égales à la grandeur a; c'est pourquoi A étant le commencement de x qui va vers H, ayant pris sur AH l'intervalle $AC = a$, le point C sera le commencement de z, qui en ce cas va vers A, & de y qui va vers g parallele à AG: car si l'on prend librement un point D sur AC; AD étant x, CD sera $a - x = z$; & le point D n'étant point fixe ne peut être l'origine de z; c'est pourquoi puisque x a son origine au point A, z commencera nécessairement au point fixe C, & ira par conséquent vers A. FIG. 75.

5. S'il y a encore une Réduction pour y semblable à une des deux premieres Formules, on la construira comme on a fait les précédentes.

CONSTRUCTION

De la troisiéme Formule $x \pm y = z$.

6. TOUTES les Réductions, où se trouvent les deux inconnues x & y de l'équation à réduire, viennent des équations où les mêmes inconnues sont multipliées l'une par l'autre dans quelque terme, & où l'une des deux, ou toutes les deux sont quarrées. Or pour ne point se trouver embarrassé dans la construction de la Réduction, la lettre inconnue de la Réduction qui est multipliée par l'autre inconnue dans l'équation à réduire, doit être construite la premiere; par exemple, si l'équation à réduire est $xx - xy = ab$; soit qu'on fasse $x - \frac{1}{2}y = z$, pour faire évanouir le second terme, soit qu'on fasse $x - y = z$ pour changer le rectangle composé $xx - xy$, en un simple xz, il faudra toujours construire y la premiere.

Supposons dans cette Formule que y étoit multipliée par x dans l'équation à réduire; & soit *A* le point fixe où commencent les inconnues x qui va vers *G*, & y qui va vers *H*, & qui fait avec *AG* un angle quelconque *GAH*. Si outre la Formule que l'on construit, il y a une reduction pour y, elle sera semblable à une des deux précedentes, c'est-à-dire, qu'elle sera $y \pm b = u$, & on la construira comme les précedentes en prenant sur *AH*, prolongée ou non prolongée selon qu'il y a $y + b$, ou $y - b$, la partie *AC*, ou $AD = b$, & l'origine de l'inconnue u sera au point *C*, s'il y a $y + b = u$; au point *D*, s'il y a $y - b = u$, & ira vers *H* dans l'un & l'autre cas : mais s'il y a $b - y = u$, le point *D* sera l'origine de u qui ira vers *A*. Cela posé. FIG. 76.

Si la Réduction est $x + y = z$, l'on prendra sur *AD* un point quelconque *E*, par où l'on menera *EF* parallele à *AG*, & ayant prolongé *EF* en *B*, en sorte que $EB = AE$, l'on menera de *A* par *B* la ligne *AB* indéfiniment prolongée du côté de *B*, & $BF = BE + EF =$

(Conſt.) $AE + EF$ ſera $= x + y = z$, & le point A ſera l'origine des trois inconnues x, y & z. Mais s'il y avoit une Réduction pour y telle que celle qu'on vient de conſtruire, l'origine des inconnues u parallele à AH & z parallele à AG, ſeroit au point O ou P, où la ligne AB rencontreroit la parallele à AG menée par C ou par D; de ſorte que les coordonnées de la courbe qu'il faut décrire ſont à preſent AB & BF, ou OB & BF, ou PB & BF.

Si la Réduction croît $x - y = z$, les points B, O & P ſeroient de l'autre côté de AH.

CONSTRUCTION

De la quatriéme Formule $x \pm \frac{ay}{b} = z$.

7. ELLE eſt la même que la précedente, excepté qu'au lieu de prendre $EB = AE$, il faut prendre EB telle que $EB . EA :: a . b$: car $BF = EF + EB = x \pm \frac{ay}{b} = z$.

CONSTRUCTION

De la cinquiéme & ſixiéme Formule $x \pm y \pm b = z$, & $x \pm \frac{ay}{b} \pm c = z$.

8. LA conſtruction de ces deux Formules ne differe de celle des deux précedentes qu'à cauſe de $\pm b$, & de $\pm c$; c'eſt pourquoi ayant conſtruit (nº. 6. & 7.) $x \pm y$, & $x \pm \frac{ay}{b}$,
FIG. 76. on prendra ſur AG prolongée du côté de A (en ſuppoſant qu'il y a $+ b$, ou $+ c$) $AI = b$, ou $= c$; & l'on menera par I la ligne IK parallele à AB qui rencontrera en K, la ligne BEF prolongée du côté de B, & KF ſera $= x + y + b = z$, ou $x + \frac{ay}{b} + c = z$, & le point I ſera l'origine des inconnues y & z, s'il n'y a point de réduction pour y: mais s'il y a une réduction pour y, le point L ou M ſera l'origine des inconnues u & z; de ſorte que les coordonnées de la courbe qu'il faut décrire, ſont preſentement

IK & *KF*, ou *LK* & *KF*, ou *MK* & *KF*.

L'on a ſuppoſé qu'il y avoit + dans les deux réductions que l'on vient de conſtruire : mais il n'eſt pas plus difficile de les conſtruire, en ſuppoſant qu'il y a par tout —, ou + & —, ou — & +: car cela ne peut que changer la poſition des lignes *AB* & *IK* par raport à elles-mêmes, & à la ligne *AH*; & dans tous les cas *AB* & *IK* ſeront toujours paralleles.

CONSTRUCTION

Des équations, ou des lieux à la ligne droite.

XVII. AU lieu de propoſer ſimplement des équations à conſtruire, on propoſera des Problêmes à réſoudre; & après avoir ramené les équations que l'on en tirera à l'état de celles des trois Sections précedentes, on en donnera la Conſtruction, & enſuite la Démonſtration.

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

1. UN *angle* GAH *étant donné, il faut trouver au dedans un point* M, *d'où ayant mené* MP *parallele à* AG, PM *ſoit égale à une ligne donnée* AB. FIG. 77.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé la donnée *AB*, a; & l'inconnue *PM*, x; l'on a par la qualité du Problême $x = a$, qui eſt une équation à ligne droite, & qui fournit cette conſtruction.

Soit menée par *B* la ligne *BM* parallele à *AH*. Je dis que *BM* renferme tous les points qui ſatisfont au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené par un point quelconque *N* de la ligne *BM*, la droite *NQ* parallele à *AG*; *AN* étant un parallelogramme, l'on aura toujours *QN* = *AB*, ou $x = a$. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

FIG. 78. 2. UN *angle* GAH *étant donné*, *il faut trouver dans cet angle un point* M, *d'où ayant mené* MP *parallele à* GA, AP *&* PM *soient ensemble égales à une ligne donnée* KL.

Ayant supposé le Problême résolu, & nommé la donnée *KL*, a; & les inconnues *AP*, x & *PM*, y; l'on aura par les qualitez du Problême $x + y = a$, ou $y = a - x$, qui est une équation à la ligne droite : mais parcequ'elle contient trois termes, je fais $a - x = z$: ce qui réduit l'équation à celle-ci $y = z$, qui n'en a que deux, & qui donne cette Construction.

Ayant pris sur *AH* & sur *AG* les lignes *AB* & *AC* égales à *KL*, & mené la ligne *BC*. Je dis que tous les points comme *M* de la ligne *BC* satisfont au Problême.

DE'MONSTRATION.

A Cause de la réduction $a - x = z$, *AB* étant nommée a, & *AP*, x; *BP* sera $a - x$ ou z, dont l'origine est (Art. 16. no. 4.) en *B*, & qui va vers *A*. Or puisque (Const.) $AB = AC$ & *PM* parallele à *AC*, *PM* sera égale à *PB*; c'est pourquoi $AP + PM$, ou $AP + PB = KL$, ou en termes Algebriques $x + y = a$. *C.Q.F.D.*

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

FIG. 79. 3. DEUX *lignes paralleles* AH, BK *terminées en* A *&* B *par une autre ligne* AG *qui fait avec elles un angle quelconque* GAH, *étant données de position. Il faut trouver dans l'angle* GBK *le point* M, *d'où ayant mené* MP *parallele à* GA, *qui rencontre* BK *en* E; ME *soit à* AP, *ou à* BE *dans la raison donnée de* m *à* n.

Ayant supposé le Problême résolu, & nommé la donnée *AB*, ou *PE*, a; & les inconnues *AP*, ou *BE*, x,

PM, y; *EM* sera $y - a$; & l'on aura par les conditions du Problême $y - a . x :: m . n$; donc $mx = ny - na$; & comme l'on ne peut point trouver une seconde équation, il suit que le Problême est indéterminé : & le lieu qui renferme tous les points qui satisfont au Problême est une ligne droite; puisque dans l'équation $mx = ny - na$, les inconnues x & y n'y sont multipliées, ni par elle-même, ni entr'elles. Pour réduire cette équation à deux termes, je fais $y - a = z$, & mettant z dans l'équation pour $y - a$, l'on a $mx = nz$ qui donne cette construction.

A étant le point fixe ou l'origine des inconnues x qui va vers *H*, & y qui va vers *G*, à cause de la réduction $y - a = z$, le point *B* devient l'origine des inconnues x qui va vers *K*, & z qui va vers *G*; soit pris $BC = n$, & mené par *C* la droite *CD* parallele à *BG* & $= m$. Je dis que la ligne indéfinie *BDI* menée par les points *B* & *D* satisfait au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené par un point quelconque *N* pris sur *BI*, la droite *NQR* parallele à *AG*, ou à *CD*, les triangles semblables *BCD*, *BQN* donneront $BC . CD :: BQ . QN$, ou en termes Algebriques $n . m :: x . z$; donc $mx = nz$ ou $mx = ny - na$, en mettant pour z sa valeur $y - a$, qui est l'équation que l'on a construite. *C.Q.F.D.*

CONSTRUCTION

Des Equations ou des lieux au cercle.

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

XVIII. U*NE ligne* AB *étant donnée de grandeur & de position. Il faut trouver hors de cette ligne un point* M, *en sorte qu'ayant mené de ce point aux extrémitez* A *&* B *de la ligne* AB, *les droites* MA, MB, *le quarré de* MA *soit au quarré de* MB *dans la raison donnée de* m *à* n. FIG. 80.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, on abbaiſſera du point M ſur AB la perpendiculaire MP, & ayant nommé la donnée AB, a; & les indéterminées AP, x; & PM, y; PB ſera $a - x$; MA^2, $xx + yy$, & MB^2, $aa - 2ax + xx + yy$, & l'on aura par les qualitez du Problême $xx + yy \,.\, aa - 2ax + xx + yy :: m \,.\, n$; donc $nxx + nyy = maa - 2max + mxx + myy$, ou en ſuppoſant que m ſurpaſſe n, $mxx - nxx - 2max + maa + myy - yy = 0$, ou $xx - \frac{2max}{m-n} + \frac{maa}{m-n} + yy = 0$, en diviſant par $m - n$; & comme on ne peut point trouver d'autre équation pour faire évanouir une des inconnues, il ſuit que le Problême eſt indéterminé; & parceque dans l'équation il y a deux quarrez inconnus délivrez de toute quantité connue qui ont mêmes ſignes dans le même membre de l'équation, & que les inconnues AP & PM exprimée par x & y font un angle droit; il ſuit que l'équation appartient au cercle, ou ce qui eſt la même choſe, que tous les points qui ſatisfont au Problême ſont à la circonference d'un cercle; il ne s'agit donc plus que de le déterminer par le moyen de l'équation que l'on vient de trouver: mais comme il y a un ſecond terme dans l'équation, il eſt clair (Art. 12. n°. 14.) que le point A qui eſt l'origine des inconnues x & y n'eſt point le centre de ce cercle; pour le trouver il faut faire évanouir le ſecond terme; pour ce ſujet, je fais $x - \frac{ma}{m-n} = z$, qui réduira l'équation à celle-ci $yy = \frac{mnaa}{mm - 2mn + nn}, = zz$; car ayant ſubſtitué $z + \frac{ma}{m-n}$, valeur de x & ſon quarré dans l'équation précedente, on aura $zz - \frac{m^2\ a^2}{\overline{m-n}^2} + \frac{ma^2}{m-n} + yy = 0$, deſtituée de ſon ſecond terme. Mais réduiſant $-\frac{m^2\ a^2}{\overline{m-n}^2}$ & $\frac{ma^2}{m-n}$

en

en même dénomination, il restera $zz - \frac{mna^2}{\overline{m-n}^2} + yy = 0$ $= yy + zz = \frac{mna^2}{\overline{m-u}^2}$, ou bien $yy = \frac{mnaa}{\overline{m-n}^2} - zz$, où les inconnues y & z ont leur origine au centre. Or pour trouver le centre du cercle, ou l'origine des inconnues y & z, il faut construire la réduction $x - \frac{ma}{m-n} = z$. Ce qui se fait en cette sorte.

A étant l'origine des inconnues x qui va vers *B*, & y qui lui est perpendiculaire, soit prise $AC = \frac{ma}{m-n}$, le point *C* sera (Art. 16. n°. 2.) l'origine des inconnues y & z & par consequent le centre du cercle qu'il faut décrire: mais le terme connu de l'équation réduite $\frac{mnaa}{mm - 2mn + nn}$ est le quarré du demi diametre du même cercle; c'est pourquoi si du centre *C* & du rayon $= \frac{\sqrt{mnaa}}{m-n}$. (Dans $\sqrt{mnaa}$ au lieu de mn, on peut substituer gg. Ainsi au lieu de $\sqrt{mnaa}$, on aura $\sqrt{aagg} = ag$. Par consequent $\frac{\sqrt{mnaa}}{m-n} = \frac{ag}{m-n} = CD = CE$.) Si, dis-je, du centre *C* & du rayon *CD* ou *CE* l'on décrit le cercle *DME*, tous les points *M* de sa circonférence satisferont au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT abbaissé d'un point quelconque *M* pris sur la circonference du cercle la perpendiculaire *MP*, par la proprieté du cercle CD^2, ou $CE^2 - CP^2 = PM^2$, ce qui est en termes Algebriques $\frac{mnaa}{mm - 2mv + nn} - zz = yy$; car

par constrúction $CE = \frac{ag}{m-n} = \frac{\sqrt{mnaa}}{m-n}$, & $CP = z$. Donc $CE - CP = \frac{\sqrt{mnaa}}{m-n} - z$, & $CE + CP = \frac{\sqrt{mnaa}}{m-n} + z$. Donc $\overline{CE - CP} \times \overline{CE + CP} = \overline{CE}^2 - \overline{CP}^2 = \frac{mnaa}{\overline{m-n}^2} - zz$. Or $PM = y$. Donc $\overline{PM}^2 = yy$: mais $zz = xx - \frac{2max}{m-n} + \frac{mnaa}{mm - 2mn + nn}$. Mettant donc cette valeur de zz dans l'équation precedente, on aura après les réductions, & transpositions $mxx - nxx - 2max + maa + myy - nyy = 0$, qui est l'équation que l'on a construite. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

Fig. 80. 1. LES *mêmes choses étant supposées que dans le Problême précedent ; il faut trouver le point* M, *en sorte que* MA *soit à* MB *dans la raison donnée de* m *à* n.

En donnant aux lignes les mêmes noms que dans le Problême précédent, on aura par la qualité du Problême $\sqrt{xx + yy} . \sqrt{aa - 2ax + xx + yy} :: m . n$; donc $n \times \sqrt{xx + yy} = m \times \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, ou $nnxx + nnyy = mmaa - 2mmax + mmxx + mmyy$, ou en supposant que m surpasse n, & divisant par $mm - nn$, l'on aura $xx \frac{- 2mmax + mmaa}{mm - nn} + yy = 0$, qui est une équation au cercle dont l'origine des inconnues x & y n'est point le centre à cause du second terme $\frac{- 2mmax}{mm - nn}$; faisant donc $x - \frac{mma}{mm - nn} = z$, pour faire évanouir le second terme, l'équation se

réduira à celle-ci $zz - \frac{mmnnaa}{m^4 - 2mmnn + n^4} + yy = 0$; car ayant ſubſtitué $z + \frac{m^2 a}{m^2 - n^2}$ valeur de x, & ſon quarré dans l'équation précedente, on aura $zz - \frac{m^4 a^2}{\overline{m^2 - n^2}^2} + \frac{m^2 a^2}{m^2 - n^2} + yy = 0$ deſtitué de ſecond terme : mais réduiſant ces termes $- \frac{m^4 a^2}{\overline{m^2 - n^2}^2}$ & $\frac{m^2 a^2}{m^2 - n^2}$ en même dénomination, il reſtera $zz - \frac{m^2 n^2 a^2}{\overline{m^2 - n^2}^2} + yy = 0$, où les inconnues z & y ont leur origine au centre du cercle qu'il faut décrire. Pour trouver ce centre, il faut conſtruire la réduction $x - \frac{mma}{mm - nn} = z$. Ce qui ſe fait en cette ſorte.

Le point A étant l'origine des inconnues de l'équation à réduire x qui va vers B, & y qui lui eſt perpendiculaire ; ſoit priſe $AC = \frac{mma}{mm - nn}$, au lieu de $\frac{m^2 a}{m^2 - n^2} = AC$, on aura $\frac{ad}{m + n} = AC$, ſi on fait $m - n . m :: m . \frac{mm}{m - n} = d$. Par conſequent ſubſtituant d à la place de $\frac{mm}{m - n}$, on a $\frac{ad}{m + n} = AC$; le point C ſera celui que l'on cherche ; c'eſt pourquoi ſi du centre C, & du rayon $= \frac{mna}{mm - nn}$, qui eſt la racine du terme connu de l'équation réduite, l'on décrit le cercle DME, tous les points de ſa circonférence ſatisferont au Problême.

Pour trouver CE ou $CD = \frac{mna}{m^2 - n^2}$, il faut faire $m - n . m :: n . \frac{mn}{m - n} = g$. Donc ſubſtituant g dans l'équation précedente, on aura $\frac{ag}{m + n} = \frac{mna}{m^2 - n^2}$. Puis faiſant $m + n . a :: g . \frac{ag}{m + n}$; $\frac{ag}{m + n}$ ſera égale à CE ou CD qui ſera le rayon cherché.

On peut encore trouver plus ſimplement le centre du cercle en cette ſorte; puiſque $\frac{mma}{mm - nn}$; eſt l'expreſſion de la diſtance du point A au centre que l'on cherche, ſi l'on ôte & ſi l'on ajoute à cette expreſſion l'expreſſion du demi diametre qui eſt $\frac{mna}{mm - nn}$, l'on aura $\frac{mma - mna}{mm - nn}$, & $\frac{mma + mna}{mm - nn}$, & diviſant les deux termes de la premiere fraction par $m - n$, & ceux de la ſeconde par $m + n$, l'on aura $\frac{ma}{m + n}$ & $\frac{ma}{m - n}$; prenant donc $AD = \frac{ma}{m + n}$, & $AE = \frac{ma}{m - n}$, DE ſera le diametre du cercle, & par conſéquent le point C, qui diviſe DE par le milieu, ſera ſon centre.

DÉMONSTRATION.

AYANT abbaiſſé d'un point quelconque M la perpendiculaire PM, par la proprieté du cercle $DP \times PE = PM^2$. Ce qui eſt en termes Algebriques $\frac{mmnnaa}{m^4 - 2mmnn + n^4} - zz = yy$: car $DP = CD - CP$, & $PE = CD + CP$. Donc $DP \times PE = \overline{CD - CP} \times \overline{CD + CP} =$

$\overline{PM}^2$. Or $CD = \frac{mna}{m^2 - n^2}$, & $CP = z$ & $PM = y$.

Donc $\overline{CD - CP} \times \overline{CD + CP} = \frac{mna}{m^2 - n^2} - z \times \frac{mna}{m^2 - n^2}$ $+ z = \frac{m^2 n^2 a^2}{m^4 - 2m^2 n^2 + n^4} - zz = yy$; mais $zz = \frac{m^4 aa}{m^4 - 2mmnn + n^4}$ $- \frac{2mmax}{mm - nn} + xx$, & mettant cette valeur de zz dans l'équation précédente l'on a $\frac{mmnnaa - m^4 aa}{m^4 - 2mmnn + n^4} + \frac{2mmax}{mm - nn} - xx$ $= yy$, & en divisant les deux termes de la premiere fraction par $mm - nn$ l'on a $xx - \frac{2mmax + mmaa}{mm - nn} + yy = 0$, qui est l'équation que l'on a construite. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

2. SI dans les équations à réduire des deux Problêmes précedens m est égale à n, elles deviendront $x = \frac{1}{2} a$; car dans ces deux Problêmes, les analogies se réduisent à celle-ci, $xx + yy \,.\, aa - 2ax + xx + yy :: 1 \,.\, 1$. Donc $xx + yy = aa - 2ax + xx + yy$; ou bien $2ax = aa$. Par consequent $x = \frac{1}{2} a$; ce qui montre que le lieu qui satisfait au Problême est une ligne droite qu'il faudra élever perpendiculairement au milieu de AB, & si m est moindre que n, dans les réductions, & dans les équations réduites n se trouvera en la place de m, & m en la place de n, & le centre du cercle sera sur AB prolongé du côté de A.

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

3. *DEUX lignes* GA, HB *perpendiculaires l'une à l'autre, & un point fixe* D *sur* AG *étant données; il faut trouver dans l'angle* GAH *un point* M *par où & par* D *ayant mené la droite* MDB *qui rencontre* AH *en* B, *le rectangle* MD × DB *soit égal au quarré de la ligne donnée* DA. FIG. 81.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, mené du point M ſur GA la perpendiculaire MP, & nommé la donnée AD, a; & les indéterminées DP, x; PM, y; à cauſe du triangle rectangle DPM, MD ſera $\sqrt{xx + yy}$; & à cauſe des triangles ſemblables PDM, ADB; $DP\ (x)$. $DM\ (\sqrt{xx + yy}) :: DA\ (a) . DB = \frac{a\sqrt{xx+yy}}{x}$; donc par la condition du Problême $\frac{axx + ayy}{x}\ (MD \times DB) = aa\ (DA^2)$; donc $xx - ax + yy = 0$, qui eſt une équation au cercle où les inconnues x & y n'ont point leur commencement au centre, parceque xx a un ſecond terme $-ax$; qu'il faut par conſequent faire évanouir; c'eſt pourquoi en faiſant $x - \frac{1}{2}a = z$, on réduira l'équation à celle-ci $zz - \frac{1}{4}aa + yy = 0$, ou $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, où les indéterminées y & z, ont leur origine au centre que l'on trouvera en faiſant $DC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a$, à cauſe de la réduction $x - \frac{1}{2}a = z$; & parceque le terme connu de l'équation eſt $\frac{1}{4}aa$ dont la racine eſt $\frac{1}{2}a$ = au demi diametre du cercle, on décrira du centre C par D le cercle DMG qui ſatisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT abbaiſſé d'un point quelconque M la perpendiculaire PM, par la proprieté du cercle, $DP \times PG = PM^2$, ce qui eſt en termes algebriques (DP étant, x; & DG, a;) $ax - xx = yy$, ou $xx - ax + yy = 0$, qui eſt l'équation que l'on a conſtruite. *C. Q. F. D.*



CONSTRUCTION

Des Equations ou des lieux à la Parabole.

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

XIX. D*EUX lignes paralleles* AH, BG *dont les extrêmitez* A *&* B *sont fixes étant données de position ; il faut trouver entre les deux un point* M, *par où & par le point* A, *ayant mené la droite* AMD *&* MP *parallele à* AB ; BD *soit à* MP ; *comme une ligne donnée* m *est à* AB. FIG. 82.

Ayant supposé le Problême résolu, & nommé la donnée AB, a ; & les indéterminées AP, x ; PM, y ; les triangles semblables MPA, ABD donneront $MP\ (y)$. $PA\ (x) :: AB\ (a)$. $BD = \frac{ax}{y}$, & par les qualitez du Problême $\frac{ax}{y} . y :: m . a$; donc $\frac{aax}{m} = yy$, qui est une équation à la parabole, où les inconnues x & y ont leur origine au sommet du diametre qui est la ligne AH, suivant ce qui est démontré dans la quatriême & cinquiême Section.

Si l'on fait $m . a :: a . \frac{aa}{m} = p$; p sera le parametre du diametre AH, & l'équation sera $px = yy$, en mettant pour $\frac{aa}{m}$ sa valeur p, & l'on décrira par le moyen de cette équation la parabole AM sur le diametre AH dont le parametre est p, comme il est enseigné (Art. 10. nº. 11.), si l'angle BAP est droit, , ou Art. 11. nº. 11, s'il est oblique. Et je dis que tous les points de cette parabole satisfont au Problême.

DÉMONSTRATION.

AYANT mené par un point quelconque M, pris sur la parabole, la ligne MP parallele à BA, l'on aura par la propriété de la parabole le rectangle de l'abscisse $AP \times p = PM^2$, ce qui est en termes algebriques $px = yy$, ou $\frac{aax}{m}$

$= yy$, en remettant pour p sa valeur $\frac{aa}{m}$ qui est l'équation que l'on a construite. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

Fig. 82, 83. I. *Ayant supposé les mêmes choses que dans le Problême précédent, & ayant prolongé* PM *en* E. *On demande que le point* M *soit tel que* BD *soit à* ME; *comme une ligne donnée* m *à* BA.

En laissant aux lignes les mêmes noms qu'on leur a donnez dans le Problême précédent, *ME* sera $a - y$, & les qualitez du Problême donneront $\frac{ax}{y} . a - yy :: m . a$; donc $\frac{aax}{y} = ma - my$, ou $\frac{aax}{m} = ay - yy$, ou $yy - ay + \frac{aax}{m} = 0$, qui est une équation à la parabole, parcequ'il n'y a qu'un quarré inconnu yy, & que les deux inconnues x & y ne se multiplient point: mais parcequ'elle contient trois termes, le sommet du diametre sur lequel il faut décrire la parabole, n'est point en *A*; quoique le point *A* soit l'origine des inconnues x & y. Il faut donc réduire cette équation, afin de trouver par le moyen des réductions le sommet du diametre sur lequel on doit décrire la parabole qui doit résoudre le Problême. En faisant pour ce sujet $y - \frac{1}{2}a = u$, afin de faire évanouir le second terme ay, l'on réduit l'équation à celle-ci $uu - \frac{1}{4}aa + \frac{aax}{m} = 0$, ou $uu = \frac{1}{4}aa - \frac{aax}{m}$: car le quarré uu doit être seul dans un des membres de l'équation, & comme il y a encore trois termes dans cette équation, l'origine des inconnues u & x, n'est point encore au sommet du diametre sur lequel on doit décrire la parabole; il faut donc encore que les deux termes $\frac{1}{4}aa - \frac{aax}{m}$ se réduisent à un seul. Pour ce sujet on cherchera 1°. une 3ᵉ proportionnelle à m & à a, qui étant nommée b; l'équation réduite se changera en celle-ci $uu = \frac{1}{4}aa - bx$, puisque $\frac{aa}{m} = b$. 2°. Ayant pris $bc = \frac{1}{4}aa$, l'on aura $uu = bc - bx$, en mettant pour $\frac{1}{4}aa$ sa valeur bc; & faisant enfin $c - x = z$, l'on aura $uu = bz$, en mettant pour $c - x$ sa valeur z, qui est une équation où

où les inconnues u & z ont leur origine au ſommet du diametre ſur lequel il faut décrire la parabole, & dont le parametre eſt b.

Les réductions & les changemens que l'on vient de faire fourniſſent la conſtruction qui ſuit. Il eſt clair que la parabole doit paſſer par les points A & B : car ſi dans l'équation à réduire $yy - ay + \frac{aax}{m} = 0$, l'on fait $y = 0$; les termes où y ſe rencontre deviendront nuls, & l'on aura $\frac{aax}{m} = 0$, ou $x = 0$, qui montre qu'elle paſſe par le point A, puiſque x & y s'y anéantiſſent ; & ſi au lieu de $y = 0$, on fait $x = 0$, le terme $\frac{aax}{m}$ ſe détruira, & l'on aura $yy - ay = 0$, d'où l'on tire $y = a$, ce qui montre que la parabole paſſe auſſi par le point B ; puiſqu'en ce cas le point P tombant en A à cauſe de $x = 0$, le point M tombe en B à cauſe de $y = a$.

Le point A étant l'origine des inconnues x qui va vers H, & y qui va vers B ; à cauſe de la premiere réduction $y - \frac{1}{2}a = u$, on diviſera AB par le milieu en C, & ayant mené par C la droite CF parallele à AH, le point C ſera l'origine des inconnues u qui va vers A & vers B, & x qui va vers F : & à cauſe de la ſeconde réduction $c - x = z$, ayant fait $CF = c$, alors le point F ſera l'origine des inconnues z qui va vers C, & u qui demeure parallele à AB, & le ſommet du diametre BC ſur lequel l'on décrira (Art. 10. n°. 11, ou Art. 11. n°. 11, ſelon que l'angle CAH ou ACF eſt droit ou oblique) la parabole AFB, par le moyen de l'équation réduite $uu = bz$, qui ſatisfera au Problême. FIG. 83.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris ſur la parabole, la ligne MI parallele à BC, l'on aura par la proprieté de la parabole $uu = bz$, ou $yy - ay + \frac{aax}{m} = 0$, en remettant pour u, pour z, & pour b, leurs valeurs $y - \frac{1}{2}a$, $c - x$, & $\frac{aa}{m}$, & pour bc ſa valeur $\frac{1}{4}aa$, qui eſt l'équation que l'on a conſtruite. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

FIG. 84. 2. U*NE ligne* AB *étant donnée de grandeur & de position. Il faut trouver un point* M *hors de cette ligne; en sorte qu'ayant mené la ligne* MP *parallele à une ligne donnée* AG, *& qui rencontre* AB, *en* P; *le rectangle* AP × PB *soit égal au rectangle de* PM *par une ligne donnée* b.

Ayant supposé le Problême résolu, soit divisée AB par le milieu en C, & nommé la donnée AC, ou CB, a; & les indéterminées CP, x; PM, y; AP sera $a + x$, & PB, $a - x$; & l'on aura par les qualitez du Problême $aa - xx = by$, ou $xx = aa - by$, qui est une équation à la parabole où les indéterminées x & y n'ont point leur origine au sommet du diametre sur lequel il faut la décrire.

Pour réduire cette équation, je prens $bc = aa$, & l'équation deviendra $xx = bc - by$, en mettant bc pour aa. Et faisant $c - y = u$, & mettant u en la place de $c - y$, l'on aura $xx = bu$, que l'on construira en cette sorte.

Le point C étant l'origine des inconnues x qui va vers B & vers A, & y qui va vers D parallele à AG, à cause de la réduction $c - y = u$, l'on prendra $CD = c$, & le point D sera l'origine des inconnues u qui revient vers C, & x qui est parallele à AB, & le sommet du diametre DC sur lequel on décrira (Art. 10. nº. 11, ou Art. 11. nº. 11.) la parabole $ADMB$, par le moyen de l'équation réduite $xx = bu$, qui satisfera au Problême.

DEMONSTRATION.

IL est clair 1º. que la parabole passe par les points A & B: car si dans l'équation à réduire $xx = aa - by$, on fait $y = 0$, le terme $-by$ deviendra nul, & l'on aura $xx = aa$; donc $x = \pm a = CA$, ou CB.

2º. D'un point quelconque M pris sur la parabole ayant mené MP & MQ paralleles à DC & à CB, l'on aura (Art. 10. nº. 8.) $DQ . DC :: QM^2 . CB^2$, ou en termes

algebriques u, ou $c - y . c :: xx . aa$, & partant $aac - aay = cxx$: mais l'on a pris $bc = aa$; l'on a donc $c = \frac{aa}{b}$, & mettant dans l'équation en la place de c sa valeur $\frac{aa}{b}$, elle deviendra $aa - by = xx$, qui est celle que l'on a construite. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

3. *UN angle* GAH, *& un point fixe* B *sur un de ses côtez* AH *étant donnez de position. Si par le point* B *on mene la droite* BC *perpendiculaire à* AH, *& d'un point quelconque* P *la droite* PE *parallele à* BC *qui rencontre* AG *en* E, *& que du centre* B, *& du rayon* PE *l'on décrive un arc de cercle qui coupe* PE *en* M ; *& comme l'on peut trouver une infinité de points comme* M, *il faut trouver une équation qui exprime la nature de la courbe que tous les points* M *forment.* FIG. 85.

Ayant supposé le Problême résolu, mené BM, & nommé les données AB, a; BC, b; & les indéterminées BP, x; PM, y; AP sera $a + x$; & les triangles semblables donneront $AB\,(a) . BC\,(b) :: AP\,(a+x) . PE = \frac{ab + bx}{a} =$ (Const.) BM; & à cause du triangle rectangle BPM, l'on aura $xx + yy = \frac{aabb + 2abbx + bbxx}{aa}$, ou $aaxx + aayy = aabb + 2abbx + bbxx$, ou en supposant que a surpasse b, $aaxx - bbxx = 2abbx + aabb - aayy$, qui est une équation à l'Ellipse. Si l'on supposoit a moindre que b, l'on auroit $bbxx - aaxx = - 2abbx - aabb + aayy$, qui est une équation à l'Hyperbole. Enfin si l'on suppose $a = b$, l'on aura, après avoir mis a à la place de b, & réduit l'équation à l'ordinaire, $yy = 2ax + aa$ qui est une équation à la parabole, dont le sommet n'est point en B à cause qu'elle contient trois termes.

Pour la réduire, on la divisera premierement par 2, afin que x ne soit accompagnée d'aucune quantité connue dans la réduction, & l'on aura $\frac{1}{2} yy = ax + \frac{1}{2} aa$, & ayant

fait $x + \frac{1}{2}a = z$, l'équation réduite ſera $\frac{1}{2}yy = az$, ou $yy = 2az$ en mettant z pour $x + \frac{1}{2}a$. Ce qui donne cette conſtruction.

A cauſe de la réduction $x + \frac{1}{2}a = z$, on diviſera AB par le milieu en D, & le point D ſera le ſommet de l'axe DH, & la parabole ſe trouve décrite par la conſtruction.

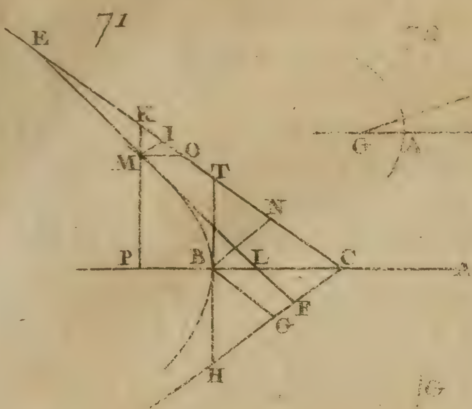
DE'MONSTRATION.

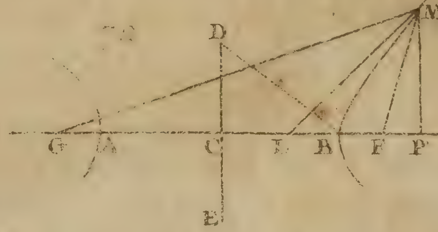
AYANT mené d'un point quelconque M pris ſur la parabole, la ligne MP perpendiculaire à DH, par la proprieté de la parabole, le parametre de l'axe étant (Art. 10. nº. 7.) $2a$, l'on aura $2az = yy$, ou $2ax + aa = yy$, en remettant pour z ſa valeur $x + \frac{1}{2}a$. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

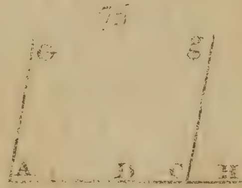
4. CE Problême pourroit ſervir de fondement à un Traité des trois Sections coniques; puiſque la même équation convient à toutes les trois en faiſant ſeulement BC égale, moindre, ou plus grande que AB, & que c'eſt auſſi la même deſcription pour toutes les trois. Je ne m'en ſuis néanmoins ſervi que pour la parabole, tant parceque les deſcriptions que j'ai données de l'Ellipſe, & de l'Hyperbole ne ſont pas moins ſimples, que parceque je n'aurois pû démontrer, comme j'ai fait, d'une maniere générale les proprietez de l'Hyperbole par raport à ſes axes, & à tous ſes diametres.

5. Il eſt aiſé de voir que B eſt le foyer de la parabole AM; A, le point générateur; AF parallele à BC, la ligne génératrice: car l'équation réduite $yy = 2az$ montre que $2a$ eſt le parametre, & par la conſtruction $BD = DA = \frac{1}{2}a$. Et parceque (Hyp.) $BC = AB$ l'on a auſſi $AP = PE =$ (Conſt.) $BM = FM$; c'eſt pourquoi cette deſcription eſt la même que celle de l'Article 10, comme on vient de remarquer.

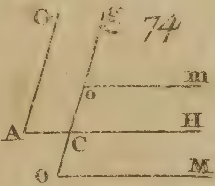

71
E
K
I
M
O
T
N
P
B
L
C
G
F
H

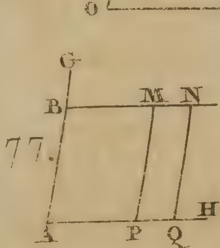

D
M
G
C
B
F
P
E

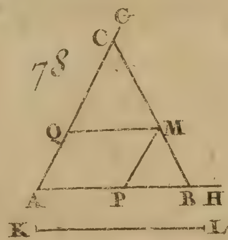

g
G
73
m
A
H
O
M

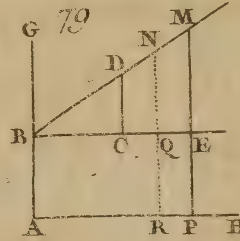

G
g
A
D
C
H

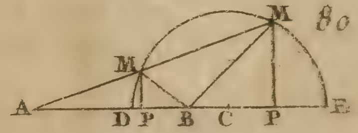

O
C
L
D
E
H
F
B
I
M
K

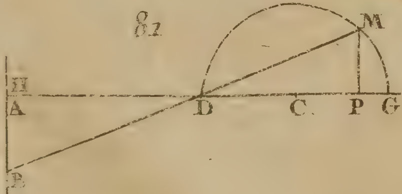

G
g
74
m
A
C
H
M

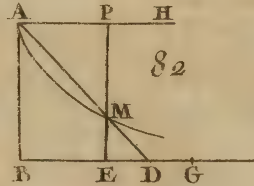

G
B
M
N
77.
H
A
P
Q

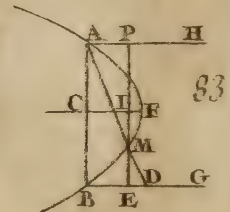

C
G
78
Q
M
A
P
B
H
K
L

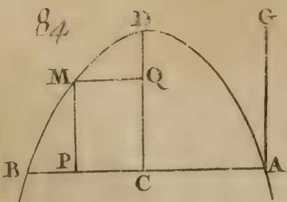

G
79
M
N
D
B
C
Q
E
A
R
P
H

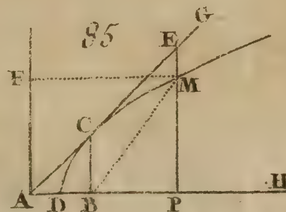

M
80
M
A
D
P
B
C
P
E

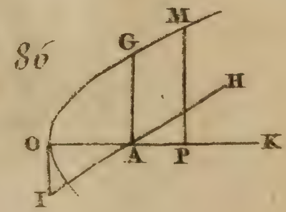

81
M
H
A
D
C
P
G

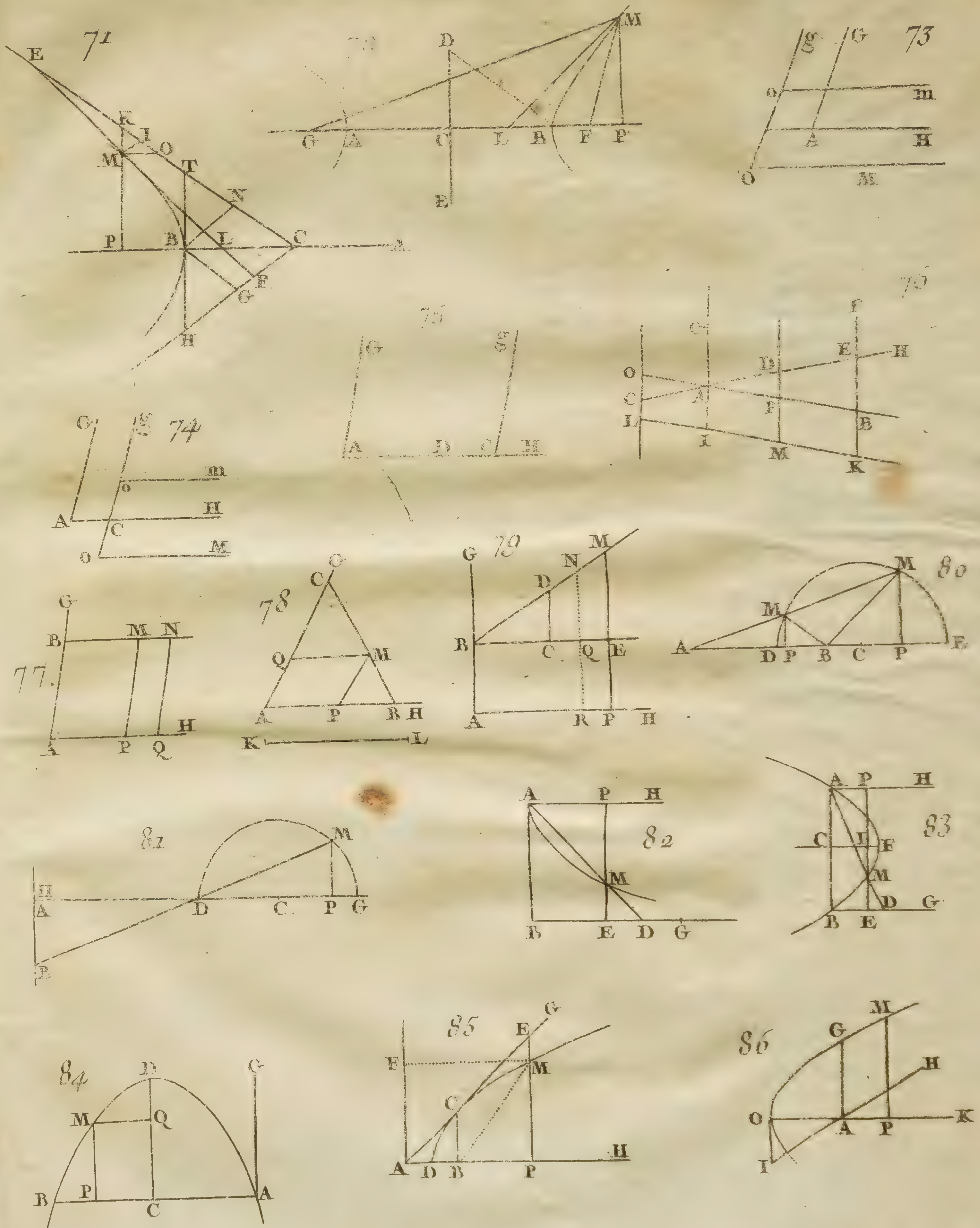

A
P
H
82
M
B
E
D
G


A
P
H
83
C
I
F
M
D
G
B
E


84
D
G
M
Q
B
P
C
A


85
E
G
F
M
C
A
D
B
P
H


M
86
G
H
O
A
P
K
I



PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

6. *SOIT une équation locale* $xx + \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} - by - bb = 0$, *qui appartient à une des quatre courbes du premier genre; puisque les inconnues* x *&* y *n'excedent point le second degré.*

Pour ramener cette équation à l'état de quelqu'une de celles des trois Sections précedentes, je fais $x + \frac{ay}{b} = z$, pour faire évanouir le second terme $\frac{2axy}{b}$, & l'équation se change en celle-ci $zz - by - bb = 0$, ou $zz = by + bb$, où l'on voit déja qu'elle est à la parabole; puisqu'il n'y a qu'un quarré inconnu zz; mais les inconnues z & y n'ont point leur origine au sommet du diametre sur lequel il la faut décrire, parcequ'il y a encore trois termes; c'est pourquoi je fais encore $y + b = u$, & l'équation devient $zz = bu$, qui est semblable à celle de l'Art. 10.

Pour construire cette équation soit *A* l'origine des inconnues *y* qui va vers *H*, & *x*, qui fait avec *AH* un angle quelconque, & va vers *G*; à cause de la deuxiéme réduction $y + b = u$, on prolongera *AH* du côté de *A* en *I*, en sorte que $AI = b$, & le point *I* sera l'origine des inconnues *u* qui va toujours vers *H*, & *x* qui fait toujours le même angle avec *IH*, & est parallele à *AG*. Fig. 86.

A cause de la premiere réduction $x + \frac{ay}{b} = z$, l'on menera par *I* la droite *IO* parallele à *AG*, & ayant fait $IO = a$; l'on menera de *O* par *A* la droite *OAK*, & le point *O* sera le sommet du diametre sur lequel il faut décrire la parabole: car si par quelque point *B*, pris sur *AH* l'on mene la droite *PBM* parallele à *IO*, l'on aura à cause des triangles semblables *AIO*

ABP, *AI* (b). *IO* (a) :: *AB* (y). $BP = \frac{ay}{b}$; & partant $PM = x + \frac{ay}{b} = z$: mais parceque les coordonnées de la parabole ſont *OP* & *PM*, l'expreſſion de *OP* doit ſe trouver dans l'équation réduite auſſi-bien que celle de *PM*, qui eſt z, & au contraire celle de *IB*, qui eſt u ne s'y doit plus rencontrer; parceque (Art. 10.) une équation à la parabole ne renferme que les expreſſions de l'abciſſe, de l'appliquée, & du parametre. Il faut donc trouver une équation qui renferme l'expreſſion de *IB* (u) & celle de *OP*, afin de faire évanouir u de l'équation réduite, & introduire en ſa place l'expreſſion de *OP*. Pour ce ſujet, je nomme la donnée *OA*; c; & l'indéterminée *OP*, $ſ$; & les triangles ſemblables *AIO*, *ABP* donneront *AI*. *AB* :: *AO*. *AP*: & *componendo* *AI*. *IB* :: *AO*. *OP*, ce qui eſt en termes algebriques $b . u :: c . ſ$; donc $uc = bſ$, & partant $u = \frac{bſ}{c}$, & mettant cette valeur de u dans l'équation réduite $zz = bu$, l'on aura $zz = \frac{bbſ}{c}$, & ſi l'on fait $\frac{bb}{c} = f$, l'on aura $zz = fſ$, & l'on décrira par l'Article 10. n°. 11, ou par l'Article 11. n°. 11, ſelon que l'angle *OPM* eſt droit ou oblique, la parabole *OM* qui ſatisfera au Problême.

DÉMONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelque *M* la droite *MP* parallele à *AG*; *OP* étant, $ſ$; *PM*, z; & le parametre, f; l'on aura par la propriété de la parabole $zz = fſ$, ou $zz = bu$, en remettant pour f & pour $ſ$, leurs valeurs $\frac{bb}{c}$ & $\frac{cu}{b}$, & remettant encore pour zz, & pour u, leurs valeurs $xx + \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb}$, & $y + b$, l'on aura $xx + \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} = by + bb$, qui eſt l'équation que l'on a conſtruite. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

7. IL n'y a que la portion de la parabole qui commence en *G*, & va vers *M* qui réſout le Problême, puiſque x & y commencent au point *A*.

CONSTRUCTION

Des Equations, ou des lieux à l'Ellipse.

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

XX. *Un triangle* ABC *étant donné, il faut trouver un point M hors de ce triangle, en sorte qu'ayant mené* MPF *parallele à* AB *qui rencontre* AC *en* P, *&* BC *en* F, *le quarré de* PM, *& le quarré de* FP *soient ensemble égaux au quarré de* AB. Fig. 87.

Ayant supposé le Problême résolu, & nommé les données AC, a; AB, b; & les indéterminées AP, x; PM, y; CP sera $a - x$; & les triangles semblables CAB, CPF donneront $CA\ (a) . AB\ (b) :: CP\ (a - x) . PF = \frac{ab - bx}{a}$, donc par les qualitez du Problême $\frac{aabb - 2abbx + bbxx}{aa} + yy = bb$, ou $xx - 2ax + \frac{aayy}{bb} = 0$, qui est une équation à l'Ellipse dont le point A qui est l'origine des inconnues x & y, n'est point le centre, à cause qu'il y a dans l'équation un second terme.

Je fais donc pour la réduire $x - a = z$, & l'équation devient par ce moyen $zz - aa + \frac{aayy}{bb} = 0$, ou $\frac{aayy}{bb} = aa - zz$, d'où suit cette construction.

La réduction $x - a = z$, montre que le point C est le centre de l'Ellipse, puisqu'il n'y a point de réduction pour y; & l'équation réduite, en faisant $y = 0$, donne $z = \pm a$; ce qui fait voir que z va vers A & vers D, & se termine en ces deux points, & que par conséquent AD est un des diametres: ce que le terme connu aa de l'équation réduite fait aussi connoître: mais parceque le quarré connu aa se trouve encore avec yy; il suit (Art. 12. n°. 9.) que

bb eſt le quarré du diametre conjugué au diametre AD; c'eſt pourquoi ſi l'on mene par le centre C la ligne GCH parallele à AB, & qu'on faſſe CG, & CH chacune $=$ $AB = b$; GH ſera le diametre conjugué au diametre AD, & l'on décrira par l'Art. 12. n°. 21, ou Art. 13. n°. 37, ſelon que l'angle BAC, ou ACH eſt droit, ou oblique, l'Ellipſe $AGDH$, qui ſatiſfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

Ayant mené librement la droite PM parallele à CH, par la propriété de l'Ellipſe $AP \times PD . PM^2 :: CA^2 . CG^2$, ce qui eſt en termes algebriques $2ax - xx . yy :: aa . bb$, d'où l'on tire $xx - 2ax + \frac{aayy}{bb} = 0$. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

Fig. 88. 1. UN *triangle* ABC *dont les côtez* AC, BC *ſont prolongez vers* H *&* *vers* G *étant donné. Si d'un point quelconque* P *pris ſur la baſe* AB, *on éleve* PEF *perpendiculaire à* AB, *ou parallele à quelque ligne donnée de poſition; il faut trouver quelle eſt la courbe qui diviſe* EF, *& ſes ſemblables en* M, *de maniere que* PE . PM :: PM . PF.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, mené CD parallele à PM, & nommé les données AB, a; AD, b; DC, c; DB, d; & les indéterminées AP, x; PE, z; PM, y; PF, u; PB ſera $a - x$; & les triangles ſemblables APE, ADC & BDC, BPF donneront $x\,(AP) . z\,(PE) :: b\,(AD) . c\,(DC)$, d'où l'on tire $bz = cx$; & $d\,(BD) . c\,(DC) :: a - x\,(BP) . u\,(PF)$, d'où l'on tire $du = ac - cx$: & par les qualitez du Problême, $z\,(PE) . y\,(PM) :: y\,(PM) . u\,(PF)$, d'où l'on tire $zu = yy$; l'on a donc trois équations, que l'on réduira à une ſeule, en faiſant évanouir z & u: (car il ne faut pas faire évanouir x & y; parcequ'elles ont les qualitez requiſes par la premiere & huitiéme obſervation de l'Art. 4. qui ſont celles qu'il faut le plus exactement ſuivre dans les Problêmes indéterminez)

nez) qui ſera $ax - xx = \frac{bdyy}{cc}$; ou $xx - ax + \frac{bdyy}{cc} = 0$, qui eſt une équation à l'Ellipſe, que l'on conſtruira en cette ſorte.

Ayant fait $x - \frac{1}{2}a = z$, l'équation ſe réduira à celle-ci $zz - \frac{1}{4}aa + \frac{bdyy}{cc} = 0$, ou $\frac{bdyy}{cc} = \frac{1}{4}aa - zz$ Or à cauſe de la réduction $x - \frac{1}{2}a = z$, ſi l'on diviſe AB par le milieu en O, le point O ſera le centre de l'Ellipſe, & l'origne des inconnues z qui va vers B & vers A, & ſe termine en ces deux points (car ſi dans l'équation réduite on fait $y = 0$, l'on aura $z = \pm \frac{1}{2}a$) & y qui va parallele à BC. Pour avoir l'expreſſion du demi diametre conjugué au diametre AB, on fera $bd. cc :: \frac{1}{4}aa . \frac{aacc}{4bd}$, & $\frac{ac}{2\sqrt{bd}}$ ſera (Art. 12. n°. 11.) l'expreſſion cherchée ; prenant donc ſur KOL parallele à DC, OK & OL chacune égale à $\frac{ac}{2\sqrt{bd}}$, KL ſera le diametre conjugué au diametre AB. L'on décrira l'Ellipſe $AMBL$ par l'Art. 12. n°. 21, ou Art. 13, n°. 37.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris ſur l'Ellipſe la droite MP parallele à CD, l'on aura par la propriété de l'Ellipſe $AP \times PB . PM^2 :: AB^2 . KL^2$. Ce qui eſt en termes algebriques $aa - xx . yy :: aa . \frac{nacc}{bd}$, d'où l'on tire $xx - ax + \frac{bdyy}{cc} = 0$. *C. Q. F. D.*

REMARQUES.

2. SI le point B étoit infiniment éloigné du point A, la ligne FCB ſeroit parallele à AB, & dans l'équation

précedente $ax - xx = \frac{bdyy}{cc}$, a & d deviendroient infiniment grandes par raport aux autres lettres ; de ſorte que le terme xx ſeroit nul par raport à ax, a ſeroit $= d$, & l'on auroit cette équation $\frac{ccx}{b} = yy$ qui montre que la courbe AMC ſeroit une parabole.

3. SI le point B étoit de l'autre côté de A ſur le prolongement de AD, dans l'équation $ax - xx = \frac{bdyy}{cc}$, a d & x deviendroient négatives, & il faudroit changer les ſignes des termes où a, d & x ne ſont multipliées ni par elles-mêmes ni entr'elles, & l'on auroit $ax - xx = - \frac{bdyy}{cc}$, ou $xx - ax = \frac{bdyy}{cc}$, qui montre que la courbe AMC ſeroit alors une Hyperbole.

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

4. SOIT l'équation $xx - \frac{bxy}{a} + cx + \frac{bbyy}{2aa} = 0$, en faiſant $x - \frac{by}{2a} + \frac{1}{2}c = z$, l'équation à reduire devient $zz - \frac{1}{4}cc + \frac{bcy}{2a} + \frac{bbyy}{4aa} = 0$, ou $yy + \frac{2acy}{b} - \frac{aacc + 4aazz}{bb} = 0$, & faiſant encore $y + \frac{ac}{b} = u$, l'on a l'équation réduite $uu - \frac{2aacc + 4aazz}{bb} = 0$, ou $\frac{4aazz}{bb} = \frac{2aacc}{bb} - uu$ qui eſt une équation à l'Ellipſe.

FIG. 89. Pour la conſtruire, ſoit le point A l'origine des inconnues y qui va vers H, & x qui va vers G, & qui ſont l'angle GAH tel que le demande le Problême d'où l'on ſuppoſe que l'équation que l'on conſtruit a été tirée. A

cause de la seconde réduction $y + \frac{ac}{b} = u$, l'on prolongera AH du côté de A, & l'on fera $AI = \frac{ac}{b}$; & le point I sera l'origine de u qui va toujours vers H, & de x qui demeure parallele à AG. A cause de la premiere réduction $x - \frac{by}{2a} + \frac{1}{2}c = z$, l'on menera par I la droite IK parallele à AG, & ayant fait $IK = \frac{AI \times b}{2a} = \frac{1}{2}c$, puisque $AI = \frac{ac}{b}$, l'on menera KA indéfiniment prolongée : & parcequ'il y a encore dans la réduction $+ \frac{1}{2}c$, ayant pris sur la ligne IK prolongée $KO = \frac{1}{2}c$, l'on menera OD parallele à KA, qui rencontrera AH en R; & le point O sera le centre de l'Ellipse & l'origine des inconnues u qui est parallele à AH, & z parallele à AG: car ayant mené par quelque point B de la ligne AH, la droite $PBCM$ qui rencontre OR en P, & KA en C: BC sera $= \frac{by}{2a}$: car $AI . IK :: 2a . b :: AB\ (y) . BC = \frac{by}{2a}$: & partant $PM\ (z) = BM - BC + CP = x - \frac{by}{2a} + \frac{1}{2}c$.

Mais parceque les coordonnées de l'Ellipse sont OP & PM, en supposant l'Ellipse décrite, l'expression de OP doit se trouver dans l'équation réduite aussi-bien que celle de PM qui est z. Au contraire celle de IB qui est u ne doit plus s'y rencontrer. Il faut donc trouver une équation qui renferme l'expression de $IB\ (u)$, & celle de OP, afin de faire évanouir u de l'équation réduite, & d'introduire en sa place l'expression de OP. Pour ce sujet, ayant prolongé AG en F, & nommé les données AI (Const.) $\frac{ac}{b}$; KA, ou OF, g; & l'inconnue OP, ou KC, f; les triangles semblables AIK, ABC donneront $AI . AB :: AK . AC$, & *componendo* $IB . AI :: KC$, ou $OP . KA$, ou OF: ce qui est en termes analytiques $u . \frac{ac}{b} :: f . g$, d'où l'on tire $u = \frac{acf}{bg}$, ou $uu = \frac{aaccff}{bbgg}$, &

mettant cette valeur de uu dans l'équation réduite, l'on aura $\frac{4aazz}{bb} = \frac{2aacc}{bb} - \frac{aaccff}{bbgg}$, ou $\frac{4ggzz}{cc} = 2gg - ff$, d'où l'on tire cette Construction. Soit faite $OD = \sqrt{2gg}$; OD sera le demi diametre de l'Ellipse, & ayant fait $4gg \,.\, cc :: 2gg \,.\, \frac{2ggcc}{4gg} = \frac{1}{2}cc$, soit prise $OQ = \sqrt{\frac{1}{2}cc}$; OQ sera le demi diametre conjugué à OD, & l'on décrira (Art. 13 n°. 37.) l'Ellipse QSD qui rencontrera KA en S, & qui satisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris sur l'Ellipse entre G & S l'appliquée MP parallele à OQ. Par la propriété de l'Ellipse $OD^2 - OP^2 \,.\, PM^2 :: OD^2 \,.\, OQ^2$; ce qui est en termes algebriques $2gg - ff \,.\, zz :: 2gg \,.\, \frac{1}{2}cc :: 4gg \,.\, cc$, d'où l'on tire $\frac{4ggzz}{cc} = 2gg - ff$, ou $\frac{4aazz}{bb} = \frac{2aacc}{bb} - uu$, en mettant pour ff sa valeur $\frac{bbgguu}{aacc}$, & réduisant: mais par les deux réductions précédentes l'on a les valeurs de zz & de uu; c'est pourquoi en mettant ces valeurs de zz & de uu dans l'équation précédente, l'on aura, après avoir ôté les fractions, & ce qui se détruit, $4aaxx - 4abxy + 2bbyy + 4aacx = 0$, ou $xx - \frac{bxy}{a} + cx + \frac{bbyy}{2aa} = 0$, qui est l'équation que l'on a à construire, *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

5. SI l'on mene RN parallele à AG, la portion GN de l'Ellipse résoudra le Problême si le point N tombe entre G & S: mais s'il tombe entre S & D, ce sera la portion

GS : car les inconnues x & y qui ſont celles du Problême qu'on vient de conſtruire ont leur origine en *A*. Et $x - \frac{by}{2a} + \frac{1}{2}c = z$ ne ſeroit point l'expreſſion de *RN* ; ſi le point *N* tomboit entre *S* & *D*.

6. Si dans la Conſtruction l'angle *OPM* s'étoit trouvé droit, & que dans l'équation $\frac{4ggzz}{cc} = 2gg - ff$, $2g = c$, le lieu auroit été au cercle. Ce qui eſt évident : car cette équation ſeroit devenue $zz = 2gg - ff$.

CONSTRUCTION

Des Equations, ou des lieux à l'Hyperbole par raport à ſes diametres.

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

XXI. UN *angle droit* HAG, *& un point fixe* B *étant* FIG. 90. *donnez de poſition ſur un Plan, il faut trouver le point* M *dans cet angle, d'où ayant mené* MF *parallele à* AB *&* MB *du point* M *au point fixe* B, MF *ſoit à* MB *dans la raiſon donnée de* m *à* n.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, l'on menera *MP* parallele à *AH*, & en nommant la donnée *AB*, a ; & les indéterminées *AP*, ou *FM*, x ; *PM*, ou *AF*, y ; *BP* ſera $x - a$; & les qualitez du problême donneront $m . n ::$ $FM\ (x) . MB = \frac{nx}{m}$, & à cauſe du triangle rectangle *BPM*, l'on aura $xx - 2ax + aa + yy = \frac{nnxx}{mm}$, ou $mmxx - 2mmax + mmaa + mmyy = nnxx$, qui eſt encore une équation générale pour les trois Sections coniques comme celle de l'Art. 19. n°. 3 : car ſi l'on fait $m = n$, l'on aura $aa - 2ax + yy = 0$, qui eſt une équation à la parabole ; ſi l'on ſuppoſe que m ſurpaſſe n, l'on aura $xx - \frac{2mmax + mmaa + mmyy}{mm - nn} = 0$.

Et enfin si l'on suppose que m soit moindre que n, l'on aura $xx + \frac{2mmax - mmaa - mmyy}{nn - mm} = 0$ qui est une équation à l'Hyperbole par raport à ses axes, à cause de l'angle droit BPM, mais parceque xx a un second terme, l'origine des indéterminées x & y n'est point au centre. Pour la ramener à l'état de celle de l'Art. 14. n°. 12, l'on fera évanouir le second terme en faisant $x + \frac{mma}{nn - mm} = z$, & l'on aura $zz - \frac{m^4aa}{n^4 - 2mmnn + m^4} - \frac{mmaa - mmyy}{nn - mm} = 0$, & en multipliant le numérateur & le dénominateur du terme $- \frac{mmaa}{nn - mm}$ par $nn - mm$ pour lui donner le même dénominateur que celui de la fraction qui le précéde, & ôtant ce qui se détruit l'on aura $zz - \frac{mmnnaa}{n^4 - 2mmnn + m^4} = \frac{mmyy}{nn + mm}$, où les inconnues z & y ont à présent leur origine au centre de l'Hyperbole. Pour le trouver, soit prolongée AB du côté de A en C en sorte que $AC = \frac{mma}{nn - mm}$ le point C sera le centre cherché. Et ayant fait $CD = \frac{mna}{nn - mm}$, qui est la racine du terme connu de l'équation; CD sera le demi axe de l'Hyperbole, & D son sommet. Si l'on fait présentement $mm . nn - mm :: \frac{mmnnaa}{n^4 - 2mmnn + m^4} . \frac{nnaa}{nn - mm}$; $\frac{na}{\sqrt{nn - mm}}$ exprimera le demi diametre conjugué au demi diametre CD; soit donc menée par le centre C la ligne CK parallele à PM & égale $\frac{na}{\sqrt{nn - mm}}$, elle sera le demi axe conjugué à CD. Il est aisé d'achever (Art. 14. n°. 30.) & de décri-

re par la premiere Propoſition du même article, l'Hyperbole AM qui ſatisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris ſur l'Hyperbole la droite MP perpendiculaire à CG, l'on aura (Art. 14. n°. 13.) $CP^2 - CD^2 . PM^2 :: CD^2 . CK^2$: ce qui eſt en termes algebriques $zz - \frac{mmnnaa}{n^4 - 2mmnn + m} . yy :: \frac{mmnnaa}{n^4 - 2mmnn + m^4} . \frac{nnaa}{nn - mm} :: \frac{mm}{nn - mm} . 1$, d'où l'on tire après les réductions $nnzz - mmzz - \frac{mmnnaa}{nn - mm} = mmyy$, ou $xx + \frac{2mmax - mmaa - mmyy}{nn - mm} = 0$, en mettant pour zz ſa valeur tirée de la réduction $x + \frac{mma}{nn - mm} = z$, & en réduiſant l'équation. *C.Q.F.D.*

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

1. *DEUX lignes* AH, BG *dont les extrèmitez* A *&* B *ſont fixes, étant données; il faut trouver entre ces deux lignes un point* M, *par où & par le point* A, *ayant mené la ligne* AMD, *qui rencontre* BG *en* D; *& la ligne* PME *parallele à* AB, *qui joint les points* A *&* B; PM *ſoit à* ED *dans la raiſon donnée de* m *à* n. FIG. 91.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé la donnée AB, ou PE, a; & les inconnues AP, x; & PM, y; ME ſera $a - y$, & les triangles ſemblables MPA, MED donneront $MP(y) . PA(x) :: ME(a - y) . ED = \frac{ax - xy}{y}$, & les qualitez du Problême donnent $y . \frac{ax - xy}{y} :: m . n$, d'où l'on tire $yy + \frac{mxy - max}{n} = 0$, qui eſt une équation à l'Hyperbole.

Pour la réduire & pour la construire, je fais $y + \frac{mx}{2n} = u$, & l'équation devient $uu - \frac{mmxx}{4nn} - \frac{max}{n} = 0$, & comme cette réduction a fait naître un premier terme $\frac{mmxx}{4nn}$ dont le second est $\frac{max}{n}$, il faut encore faire évanouir $\frac{max}{n}$. Pour ce sujet afin d'avoir xx délivré de toute quantité donnée, je multiplie toute l'équation par $4nn$, & je la divise par mm, ce qui la change en celle-ci $\frac{4nnuu}{mm} = xx + \frac{4nax}{m}$; & faisant $x + \frac{2na}{m} = z$, l'on a l'équation réduite $\frac{4nnuu}{mm} = zz - \frac{4nnaa}{mm}$, d'où l'on tire cette Construction.

Le point A étant l'origine des inconnues x qui va vers H, & y qui va vers B; à cause de la seconde réduction $x + \frac{2na}{m} = z$, soit prolongée PA en K, en sorte que $AK = \frac{2na}{m}$; le point K sera l'origine de z qui va toujours vers H, & de y qui, ayant mené KO parallele à AB, va vers O: à cause de la premiere réduction $y + \frac{mx}{2n} = u$; soit prise $KO = \frac{mAK}{2n} = a$, en mettant pour AK sa valeur $\frac{2na}{m}$, & du point O par A ayant mené OAC qui rencontrera MP prolongée en C, MC sera $= y + \frac{mx}{2n} = z$: car à cause des triangles semblables AKO, APC,

APC, l'on aura $AK\left(\frac{2na}{m}\right).\ KO\,(a) :: AP\,(x).\ PC =$ $\frac{mx}{2n}$; & partant $PM + PC = y + \frac{mx}{2n}$; de ſorte que O eſt le centre de l'Hyperbole, & l'origine des inconnues z qui va vers G (car le point O eſt dans le prolongement de GB à cauſe de $KO = AB$) & y qui demeure toujours parallele à AB : Mais les coordonnées de l'Hyperbole ſont préſentement OC, & CM en ſuppoſant l'Hyperbole décrite; c'eſt pourquoi l'expreſſion de OC ſe doit trouver dans l'équation réduite auſſi-bien que celle de CM (u): au contraire celle de KP (z) ne doit plus s'y rencontrer; il faut donc trouver une équation qui renferme l'expreſſion de KP (z) & de OC, afin de faire évanouir z de l'équation réduite, & d'introduire en ſa place celle de OC.

Pour ce ſujet, ayant nommé les données AK (Conſt.) $\frac{2na}{m}$; AO, d; & l'indéterminée OC, $ſ$; l'on aura à cauſe des triangles ſemblables KAO, PAC, $AK.\ AO :: KP.\ OC$, ou en termes algebriques $\frac{2na}{m}.\ d :: z.\ ſ$; donc $dz = \frac{2naſ}{m}$, ou $z = \frac{2naſ}{md}$, ou $zz = \frac{4nnaaſſ}{mmdd}$; mettant donc dans l'équation réduite en la place de zz ſa valeur que l'on vient de trouver, l'on aura $\frac{4nnuu}{mm} = \frac{4nnaaſſ}{mmdd} - \frac{4nnaa}{mm}$, ou en réduiſant $\frac{dduu}{aa} = ſſ - dd$, & l'on décrira (Art. 14. n°. 30.) par le moyen de cette équation, l'Hyperbole AM qui réſoudra le Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris ſur l'Hyperbole la ligne MPC parallele à BA, l'on aura par la propriété de l'Hyperb. $AK^2.\ KO^2 :: OC^2 - OA^2.\ CM^2$,

ou $dd \cdot aa :: ff - dd \cdot uu$, d'où l'on tire $\frac{dduu}{aa} = ff - dd$, ou $yy + \frac{mxy - max}{n} = 0$, & remettant pour ff, pour uu & pour zz leurs valeurs tirées des équations précedentes, & réduisant. *C. Q. F. D.*

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

FIG. 92. 2. I*L faut trouver dans un triangle donné* ABC *un point* M, *par où ayant mené une ligne* DME *parallele à un des côtez* AC, *& du point* A *par le même point* M, *la ligne* AMF, *qui rencontre* BC *en* F ; BF *soit à* BD *dans la raison donnée de* m *à* n.

Ayant supposé le Problême résolu, soit menée MG parallele à BC, & nommé les données AB, a; BC, b; & les inconnues AG, x; GM, y; GB sera, $a - x$; & les triangles semblables AGM & ABF, CBA & MGD, donneront $AG\ (x) \cdot GM\ (y) :: AB\ (a) \cdot BF = \frac{ay}{x}$, & $CB\ (b) \cdot BA\ (a) :: MG\ (y) \cdot GD = \frac{ay}{b}$; donc $BD = a - x + \frac{ay}{b}$, & par les qualitez du Problême, l'on a $m \cdot n :: \frac{ay}{x}\ (BF) \cdot a - x + \frac{ay}{b}\ (BD)$, d'où l'on tire $xx - \frac{axy}{b} - ax + \frac{nay}{m} = 0$, qui est une équation à l'Hyperbole, & qui montre que la même Hyperbole doit passer par les points A & B: car si l'on fait $x = 0$, l'on aura aussi $y = 0$; d'où il suit que les points G & M se confondent avec le point A, qui par conséquent est un des points de l'Hyperbole; & si l'on fait $y = 0$, l'on aura $x = a$ qui fait connoître que le point G tombant en B, le point M y tombe aussi; & par conséquent le point B est un des points de l'Hyperbole. Pour réduire cette équation, on fera $x - \frac{ay}{2b} - \frac{1}{2}a = z$, & l'on en tirera $\frac{4bbzz}{aa} = yy + 2by - \frac{4nbby}{ma} + bb$, & faisant encore $y + b - \frac{2nbb}{ma} = u$,

l'on aura l'équation toute réduite $\frac{4bbzz}{aa} = uu + \frac{4mnab^3 - 4nnb^4}{mmaa}$, qui avec les réductions donnent cette construction.

Ayant mené AK parallele à BC, A étant l'origine des inconnues x qui va vers B & y qui va vers K; à cause de la seconde réduction $y + b - \frac{2nbb}{ma} = u$, soit prise $AK = b - \frac{2nbb}{ma}$; K sera l'origine des inconnues u qui va sur AK de côté & d'autre de K, & x parallele à AB. Et ayant divisé AB par le milieu en I, & mené IC; à cause de la premiere réduction $x = -\frac{ay}{2b} - \frac{1}{2}a = z$, soit menée KO parallele à AB qui rencontrera IC prolongée, s'il est nécessaire, en O; le point O sera l'origine des inconnues z qui va de part & d'autre du point O parallele à AB, & u, qui va de part & d'autre du point O parallele à BC, ou à AK: car ayant mené AL parallele à IO qui rencontre KO en L; LO sera égale à $AI = \frac{1}{2}a$; & à cause des triangles semblables CBI, AKL, l'on a $CB\ (b) . BI\ \left(\frac{1}{2}a\right) :: AK\ (y)\ KL = \frac{ay}{2b}$, & partant $KO = \frac{ay}{2b} + \frac{1}{2}a$.

Mais parceque ayant mené MP parallele à AB, & prolongé GM en S, les coordonnées de l'Hyperbole qui doit être le lieu où se doivent trouver tous les points M, sont présentement OP & PM; c'est pourquoi il faut introduire dans l'équation réduite l'expression de OP que je nomme f, & faire évanouir celle de SM qui est u. Pour y parvenir; je nomme la donnée CI, d; & à cause des paralleles BI, PM & OS, l'on a $CB . IC :: MS . OP$ ou $b . d :: u . f$; & partant $u = \frac{bf}{d}$ & $uu = \frac{bbff}{dd}$; mettant donc dans l'équation réduite en la place de uu sa valeur $\frac{bbff}{dd}$ que l'on vient

de trouver, l'on aura $\frac{4ddzz}{aa} = ff + \frac{4mnabdd - 4nnbbdd}{mmaa}$, qui ſervira à déterminer les demi diametres conjuguez *OR*, & *OT* ſur *OP* & *OK*, & l'on décrira (Art. 14. n°. 30.) l'Hyperbole *AMB* qui réſoudra le Problême.

DÉMONSTRATION.

ELLE eſt ſemblable à celle des Propoſitions précedentes.

CONSTRUCTION

Des Equations, ou des lieux à l'Hyperbole par raport à ſes aſymptotes.

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

FIG. 93. XXII. DEUX *lignes paralleles* AH, BG, *dont les extrêmitez* A & B *ſont fixes, étant données de poſition ſur un Plan; ſoit une autre ligne* CD *menée librement perpendiculaire aux paralleles. Il faut trouver ſur* CD *le point* M, *en ſorte que ayant mené des points* A & B *les droites* AM, & BM, *l'angle* AMC *ſoit égal à l'angle* BMD *dans toutes les poſitions de* CD *parallele à elle-même.*

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, ſoit menée *BE* parallele à *CD*, & nommé les données *BE*, ou *DC*, a; *AE*, b; & les indéterminées *BD*, ou *EC*, x; *DM*, y; *AC* ſera $b + x$; & *CM*, $a - y$. Puiſque par la conſtruction les angles *ACM*, *BDM* ſont droits, & par l'Hypotheſe, l'angle *AMC* égal à l'angle *BMD*, les triangles *ACM*, *BDM* ſeront ſemblables; c'eſt pourquoi l'on aura *AC* . *CM* :: *BD* . *DM*, ou en termes algébriques, $b + x . a - y :: x . y$; donc $by + xy = ax - xy$, ou $\frac{1}{2}by + xy = \frac{1}{2}ax$ (en diviſant par 2. pour délivrer le produit des inconnues de toute quantité connue) qui eſt une équation à l'Hyperbole par raport à ſes aſymptotes, puiſque aucune

des deux inconnues, n'est élevée au quarré, & qu'elles sont multipliées l'une par l'autre comme dans celle de l'Art. 14. n°. 4. Mais parceque cette équation contient trois termes, il suit (Art. 14. n°. 4.) que le point *B* qui est l'origine des inconnues x & y, n'est point le sommet de l'angle des asymptotes. Pour le trouver & déterminer la position des asymptotes, il faut réduire l'équation en changeant les produits composez en produits simples. Faisant donc $\frac{1}{2}b + x = z$, l'on aura $x = z - \frac{1}{2}b$, & mettant dans l'équation en la place de x sa valeur $z - \frac{1}{2}b$, l'on en tirera $\frac{1}{2}az - yz = \frac{1}{4}ab$, & faisant encore $\frac{1}{2}a - y = u$, l'on aura $y = \frac{1}{2}a - u$, & mettant cette valeur de y dans l'équation précédente, l'on aura $uz = \frac{1}{4}ab$, où les inconnues u & z, ont (Art. 14.) leur origine au sommet de l'angle des asymptotes. Les deux réductions précédentes, & l'équation réduite fournissent cette construction.

A cause de la premiere réduction $x + \frac{1}{2}b = z$, on prolongera *DB* en *I* en sorte que $BI = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}b$ & ayant mené *IK* parallele à *BE*, le point *I* sera l'origine des inconnues z qui va (Art. 16. n°. 1.) vers *G*, & y qui va vers *K*. A cause de la seconde réduction $\frac{1}{2}a - y = u$, on prendra $IK = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}a$, & ayant mené *KO* parallele à *AH*, ou à *BG*, le point *K* sera l'origine des inconnues z qui va vers *O*, & u qui va (Art. 16. n°. 4.) vers *I*, & le sommet de l'angle des asymptotes *KI* & *KO*, puisque l'équation $uz = \frac{1}{4}ab$ n'a que deux termes; comme celle de l'Art. 14. On voit par l'équation $uz = \frac{1}{4}ab$, que l'Hyperbole doit passer par le point *B*, puisque $\frac{1}{4}ab = \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b = KI \times IB$. On décrira donc (Art. 14.) par le point *B*, entre les asymptotes *KO*, *KI*, l'Hyperbole *BM* qui satisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené par un point quelconque *M* pris ſur l'Hyperbole, les lignes *CMD* & *MP* paralleles à *BE* & à *KO*; l'on aura (Art. 14.) $KI \times IB = KP \times PM$, ou en termes algebriques, $uz = \frac{1}{4}ab$, ou $\frac{1}{2}by + xy = \frac{1}{2}ax$, en remettant pour z & pour u leurs valeurs tirées des réductions. *C. Q. F. D.*

1. Si dans cette équation on fait $b = 0$, le point *A* ſe confondra avec le point *E*, & l'on aura $y = \frac{1}{2}a$, qui eſt une équation à la ligne droite, & qui montre que le point *M* ſe trouvera ſur la ligne *KO* qui partage *EB*, & *CD* par le milieu.

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

FIG. 94. 2. *UN angle* GAH, *& un point* C, *étant donnez de poſition ſur un Plan. Si l'on mene du point* C *une infinité de lignes droites comme* CDB, *qui rencontrent les lignes* AG, AH *aux points* D *&* B, *& que l'on prenne ſur chaque* CDB *un point* M, *en ſorte que* CM *ſoit toujours à* DB *dans la raiſon donnée de* m *à* n. *Il faut trouver une équation qui exprime la nature de la courbe qui paſſe par tous les points* M.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, on menera par le point donné *C* & par le cherché *M*, les lignes *CI*, *MK* paralleles à *AH*, qui rencontreront *GA* prolongée en *I* & en *K*: & ayant nommé les données *AI*, a; *IC*, b; & les inconnues *IK*, x; *KM*, y; *AK* ſera $a - x$; & les qualitez du Problême donneront $m . n :: IK (x) . AB = \frac{nx}{m}$: car à cauſe des paralleles, $IK . AB :: CM . DB$, donc $KB = a - x + \frac{nx}{m}$, & $IB = a + \frac{nx}{m}$; & à cauſe des triangles ſemblables *CIB*, *MKB*, l'on aura $b (IC) . a + \frac{nx}{m} (IB) :: y (KM) . a - x + \frac{nx}{m} (KB)$; d'où l'on tire $\frac{mab - mbx + nbx}{n} = \frac{may}{n} + xy$, qui eſt une équation à l'Hyperbole entre ſes aſymptotes; qu'il faut réduire pour en déterminer la poſition. Faiſant donc $\frac{ma}{n} + x = z$, l'on a

$x = z - \frac{ma}{n}$; & mettant cette valeur de x dans l'équation, l'on aura, après avoir ôté ce qui se détruit, en transposant, $\frac{mmab}{nn} = zy + \frac{mbz}{n} - bz$; & faisant encore $y + \frac{mb}{n} - b = u$, l'on aura $\frac{mmab}{nn} = zu$, où les inconnues u & z ont leur origine au sommet de l'angle des asymptotes. L'équation réduite & les réductions fournissent la construction suivante.

A cause de la premiere réduction $\frac{ma}{n} + x = z$, l'on prolongera AI en O, en sorte que $IO = \frac{ma}{n}$, & l'on menera OQ parallele à IC; à cause de la seconde réduction $y + \frac{mb}{n} - b = u$, en supposant que m surpasse n, l'on prolongera OQ du côté de O en R, en sorte que $OR = \frac{mb}{n} - b$; & ayant mené RS parallele à IB, les lignes RQ, RS seront les asymptotes, & R, l'origine des inconnues z qui va vers S, & u qui va vers Q. Si l'on prolonge CI en F, FC sera (const.) $\frac{mb}{n} - b + b = \frac{mb}{n}$, & OI ou RF étant (const.) $= \frac{ma}{n}$; l'on aura $RF \times FC = \frac{mmab}{nn}$; c'est pourquoi l'Hyperbole qui satisfait au Problême passera par le point C. On la décrira par l'Article 14.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris sur l'Hyperbole, la ligne MKP parallele à RQ, l'on aura par la propriété de l'Hyperbole $RP \times PM = RF \times FC$, ce qui est en termes algebriques $uz = \frac{mmab}{nn}$, ou $\frac{mab - mbx + nbx}{n} = \frac{may}{n} + xy$, en remettant pour z & pour u leurs valeurs tirées des réductions. *C. Q. F. D.*

3. Si $m = n$, la ligne RS se confondroit avec OB, & IO seroit égale à IA; car l'équation à réduire deviendroit $ab = ay + xy$, & la premiere réduction seroit $a + x = z$, & il n'y en auroit point de seconde.

PROBLÊME INDÉTERMINÉ.

FIG. 95. 4. DEUX *lignes droites* AG, BH, *dont les extrêmitez* A & B *sont fixes, & qui étant prolongées concourrent en un point* C, *étant données de position; soit une autre ligne* DE *menée librement de l'une à l'autre parallele à une ligne donnée de position. Il faut déterminer sur* DE, *le point* M, *en sorte qu'ayant mené* AM *&* BM, *l'angle* DAM *soit toujours égal à l'angle* EBM.

Ayant supposé le Problême résolu, on menera BK parallele à DE, & ayant divisé l'angle ACB en deux également par la ligne CO, on menera par les points A & B les lignes AF & BI paralleles à CO, qui rencontreront DE en F & en I, & KB en L. Ces paralleles seront données de position, & KL, LB ou FI & AL seront données de grandeur. Or puisque par la const. les angles DAF, EBI sont égaux, le Problême se réduit à trouver sur FI le point M, en sorte que l'angle FAM soit égal à l'angle IBM. Pour en venir à bout, soient menées FP qui fasse avec AF l'angle $AFP = AFD$, ou BIM, & qui rencontre BI en P, & MN parallele à FB. Il est clair que les triangles FIP, MNI seront isoceles: car les angles $AFD + AFM = 2$ droits $=$ (const.) $AFP + AFM = AFM + MFP + FIP = MFP + FIP + IPF$ donc $AFM = IPF = FIP$. Et parceque le triangle FIP demeure toujours le même, puisque la ligne FI demeure toujours parallele à elle-même, ses côtez seront donnez de grandeur; & les triangles AFM, BNM seront semblables.

Nommant donc les données LB, ou FI, a; AL, b; IP, c; & les inconnues FM, x; LF, ou BI, y; MI ou MN sera $a - x$, & AF, $b + y$; & les triangles semblables FIP, MIN donneront $FI(a) . IP(c) :: MI . (a - x) . IN = \frac{ac - cx}{a}$; donc $BN = y + \frac{ac - cx}{a}$; & à

cause

cause des triangles semblables, $AF \,.\, FM :: BN \,.\, NM$, ou en termes algebriques, $b + y \,.\, x :: y + \frac{ac - cx}{a} \,.\, a - x$; d'où l'on tire $aab + aay - abx - 2axy = acx - cxx$, qui est une équation à l'Hyperbole que l'on peut regarder, ou par raport à ses diametres, ou par raport à ses asymptotes : mais comme on en a construit de semblables dans l'article précedent, en réduisant les équations aux diametres, on construira celle-ci en la réduisant aux asymptotes selon l'Article 15. n°. 14. L'on a en transposant & divisant par $2a$, $\frac{aab + cxx - abx - acx}{2a} = xy - \frac{1}{2}ay$, & faisant $x - \frac{1}{2}a = z$, l'équation se réduit à celle-ci, $\frac{\frac{1}{2}aab + czz - \frac{1}{4}aac - abz}{2a} = yz$, ou $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac = yz + \frac{1}{2}bz - \frac{czz}{2a}$, en supposant que b surpasse $\frac{1}{2}c$; & faisant encore $y + \frac{1}{2}b - \frac{cz}{2a} - u$, l'on aura l'équation réduite $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac = uz$, qui appartient à l'Hyperbole par raport à ses asymptotes, & où les inconnues u & z ont leur origine au sommet de leur angle. Les réductions & l'équation réduite donnent cette construction.

Le point L étant l'origine des inconnues x qui va vers B, & y qui va vers F; à cause de la premiere réduction $x - \frac{1}{2}a = z$, on divisera LB par le milieu en R, & le point R sera l'origine de z qui va vers B, & de y qui va vers Q.

Ayant mené RQ parallele à BP; à cause de la seconde réduction $y + \frac{1}{2}b - \frac{cz}{2a} = u$, on prolongera QR en S, en sorte que $RS = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}LA$, & ayant mené ST parallele à RB, le point S sera l'origine des inconnues z qui va vers T, & u qui va vers Q, & le sommet de l'angle des asymptotes qui seroient SQ & ST, si la seconde réduction étoit $y + \frac{1}{2}b = u$: mais elle est $y + \frac{1}{2}b - \frac{cz}{2a}$

$=u$; c'eſt pourquoi ſoit prolongée IB du côté de B, qui rencontrera ST en V, & ayant fait $VY = \frac{1}{4}c = \frac{1}{4}IP$, ſoit menée SY, & du point M la ligne MX parallele à IB, qui rencontrera ST en X, & SY en Z, & ZX ſera $\frac{cz}{2a}$: car $SV\left(\frac{1}{2}a\right) . VY\left(\frac{1}{4}c\right) :: SX(z) . XZ = \frac{cz}{2a}$; & partant $MZ\ (u) = y + \frac{1}{2}b - \frac{cz}{2a}$, & $BY = \frac{1}{2}b - \frac{cz}{2a}$, & alors les lignes SQ & SY ſeront les aſymptotes; & par conſéquent SZ & ZM, les coordonnées.

Il n'eſt pas cependant neceſſaire de faire évanouir l'expreſſion de $SX = z$ de l'équation réduite, pour introduire en ſa place celle de SZ: car 1°. Soit qu'on le faſſe ou non, on trouvera par le moyen de l'équation réduite, que l'Hyperbole doit toujours paſſer par le même point: comme en ce cas, où l'équation réduite eſt $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac = uz$; le terme connu $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c \times \frac{1}{2}a = BY \times SV$, fait connoître (Art. 14. n°. 12.) que l'Hyperbole doit paſſer par le point B; & ſi l'on nomme SY, d; & SZ, f; pour introduire l'expreſſion SZ dans l'équation réduite en la place de celle de SX, l'on aura à cauſe des triangles ſemblables SVY, SXZ, $SV . SY :: SX . SZ$, ou en termes algebriques $\frac{1}{2}a . d :: z . f$, d'où l'on tire $z = \frac{af}{2d}$, & mettant dans l'équation réduite $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac = uz$, en la place de z ſa valeur $\frac{af}{2d}$, l'on aura $\frac{1}{2}bd - \frac{1}{4}cd = fu$, dont le terme connu $\frac{1}{2}bd - \frac{1}{4}cd = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c \times d = BY \times SY$, montre comme auparavant, que l'Hyperbole doit paſſer par le point B. Ce que l'on connoît auſſi par l'équation à réduire $aab + aay - abx - 2axy = acx - cxx$: car faiſant $x = a$, afin

que le point M tombe en B, l'on aura $aab + aay - aab - 2aay = aac - aac$, d'où l'on tire $y = 0$; d'où il suit que l'Hyperbole passe par le point B, puisque BI s'y anéantit.

2°. Le rectangle $SV \times BY$, ou $RB \times BY$ étant égal à $SQ \times SX$, le rectangle $SY \times BY$ sera (Art. 14. n°. 6.) égal au rectangle $SQ \times SZ$; d'où l'on voit qu'il est en quelque façon plus simple de réduire ces sortes d'équations aux asymptotes de l'Hyperbole que de les réduire aux diametres. Si donc l'on décrit par le point B entre les asymptotes SQ, SY l'Hyperbole BM, elle satisfera au Problême.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris sur l'Hyperbole la droite MZX parallele à QS; par la proprieté de l'Hyperbole (Art. 14. n°. 6.), l'on a $SV \times BY = SY \times MZ$, ou en termes algebriques $\frac{1}{4} ab - \frac{1}{8} ac = uz$, d'où l'on tire $aab + cxx - acx - abx = 2axy - aay$, en remettant pour u & pour z, leurs valeurs. *C.Q.F.D.*

COROLLAIRE I.

5. SI les paralleles AF, BI étoient perpendiculaires à DE, les points P & N se confondroient avec le point I, & $IP = c$ deviendroit nulle ou $= 0$; c'est pourquoi il faudroit effacer tous les termes où c se trouve dans l'équation à réduire $aab + cxx - acx - abx = 2axy - aay$, & l'on auroit, $ab - bx = 2xy - ay$, que l'on construiroit comme celle du premier Problême de cet article.

COROLLAIRE II.

6. SI outre cela le point A tomboit en K, $AL = b$ deviendroit nulle, & l'on auroit $x = \frac{1}{2} a$, en effaçant tous les termes où b se rencontre dans l'équation $ab -$

$bx = 2xy - ay$, & le point M ſe trouveroit dans la ligne droite RQ menée par le milieu de KB parallele à IB.

COROLLAIRE III.

7. LES choſes étant ſuppoſées comme dans l'énoncé du Problême n°. 4. Si $2AL = IP$, ou $2b = c$ dans l'équation réduite $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac = zu$, l'on aura $\frac{1}{4}ab = \frac{1}{8}ac$, & partant $zu = 0$; d'où il ſuit qu'en ce cas l'Hyperbole ſe confond avec ſes aſymptotes, & que par conſéquent le point M ſe trouvera dans la ligne RQ qui eſt une des aſymptotes. En effet en ce cas l'équation à réduire devient $aab + 2bxx - 3abx - 2axy + aay = 0$, en mettant $2b$ en la place de c, qui étant diviſée par $2x - a = 0$, il vient $bx - ab - ay = 0$, & l'équation $2x - a = 0$, donne $x = \frac{1}{2}a$, qui montre que le point M ſe trouve dans la ligne RQ menée par le milieu de LB parallele à AL.

COROLLAIRE IV.

8. ENFIN ſi $2AL$ eſt moindre que IP, ou que le point A, ſe confonde avec le point K, ou qu'il ſe trouve au deſſous de K, l'Hyperbole ſe trouvera de l'autre côté de RQ, & paſſera par le point A : car dans l'équation réduite $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac = uz$, $\frac{1}{8}ac$ ſupaſſera $\frac{1}{4}ab$ dans le premier cas; $\frac{1}{4}ab$ ſera nulle ou $= 0$ dans le ſecond; & dans le troiſiéme, b deviendra negative de poſitive qu'elle étoit. Ainſi la quantité $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac$ ſera toujours negative, & partant l'Hyperbole ſe trouvera de l'autre côté de RQ.

REMARQUES.

9. LORSQU'ON veut réduire ces ſortes d'équations à l'Hyperbole par raport à ſes aſymptotes il faut obſerver 1°. Que ſi la lettre inconnue qui n'eſt point quarrée dans l'équation, ſe trouve multipliée par une quantité connue dans quelqu'un de ſes termes, autre que dans celui où elle ſe trouve multipliée par l'inconnue qui eſt quarrée, il faut mettre tous les termes où l'inconnue qui n'eſt point quarrée ſe trouve dans un des membres de l'équation, & tous les autres termes dans l'autre, & faire la premiere réduction ſur le membre où l'inconnue qui n'eſt point quarrée ſe trouve.

2°. Dans la ſeconde réduction (qui ſeroit la ſeule, ſi la lettre inconnue qui n'eſt point quarrée ne ſe trouvoit point ſeule dans quelque terme de l'équation) la lettre inconnue qui n'eſt point quarrée doit toujours être poſitive.

3°. Dans l'une & l'autre réduction, l'inconnue qui n'eſt point quarrée, doit toujours être délivrée de toute quantité connue.

4°. Quand on ne veut point ſe donner la peine de faire toutes ces réflexions, il n'y a qu'à réduire ces équations à l'Hyperbole, en les regardant par raport à ſes diametres, où il n'y a aucune précaution à prendre. Il faut éclaircir ceci par un exemple.

EXEMPLE.

10. SOIT l'équation $\frac{aab + cxx - abx - acx}{2a} = xy - \frac{1}{2}ay$, qui eſt celle que l'on vient de conſtruire. Si on ſuppoſe que le point A tombe en K, $AL = b$ deviendra nulle ou $= 0$; c'eſt pourquoi en effaçant tous les termes où b ſe rencontre, l'on aura $\frac{cxx - acx}{2a} = xy - \frac{1}{2}ay$ que l'on ſe propoſe de réduire à l'Hyperbole par raport à ſes aſym-

ptotes, & dont les termes ſont diſpoſez dans l'un & l'autre membre de l'équation ſelon ce qui eſt dit dans le premier cas de la remarque précédente.

Faiſant donc $x - \frac{1}{2}a = z$, l'on réduira l'équation à celle-ci $czz - 2ayz = \frac{1}{4}aac$, ou $\frac{czz}{2a} - yz = \frac{1}{8}ac$. Il faudroit pour faire la ſeconde réduction prendre $\frac{cz}{2a} - y = u$; mais parceque l'inconnue y qui n'eſt point quarrée dans l'équation à réduire ſe trouve négative dans cette ſeconde réduction, & qu'elle y doit être poſitive, les réductions que l'on vient de faire ne ſerviront de rien. Il faut donc changer les ſignes de tous les termes de l'équation pour la réduire de nouveau, & l'on aura $\frac{acx - cxx}{1a} = \frac{1}{2}ay - xy$; & en faiſant $\frac{1}{2}a - x = z$, l'on réduira l'équation à celle-ci $\frac{1}{8}ac = zy + \frac{czz}{2a}$, & faiſant $y + \frac{cz}{2a} = u$, l'on aura $\frac{1}{8}ac = zu$. Les réductions & l'équation réduite ſerviront à décrire l'Hyperbole, qui paſſera par le point K ou A qui (Hyp.) ne font qu'un même point. On voit encore par l'équation à réduire que l'Hyperbole doit paſſer par le point K: car ſi l'on fait $x = 0$, l'on aura auſſi $y = 0$, d'où il ſuit que les coordonnées s'anéantiſſent au point K.



SECTION IX.

Où l'on donne la Méthode de construire les Problêmes Solides déterminez, par le moyen de deux équations locales, ou indéterminées, lorsque l'une des deux se rapporte au cercle, ou y peut être ramenée.

MÉTHODE.

XXIII. LEs inconnues de ces deux équations étant les mêmes, elles auront leur origine en un même point, & ayant construit ces deux équations l'une après l'autre par les regles de la Section précedente, les points où les courbes ausquelles elles appartiennent se couperont, résoudront les Problêmes, comme on va voir par les exemples qui suivent.

EXEMPLE. I.

Problême Solide.

1. U*N demi cercle* AMB *dont le diametre est* AB, *& le centre* C, *& une ligne* GH *perpendiculaire à* AB, *étant donnez de position, il faut trouver sur la circonférence le point* M, *par où ayant mené du centre* C, *la droite* CME, *qui rencontre* GH *en* E, *& par le même point* M, *la droite* MH *parallele à* AB, *qui rencontre la même* GH *en* H; HE *soit égale au demi diametre* CB *du cercle donné, ou à une autre ligne donnée.* Fig. 96.

Ayant supposé le Problême résolu, on abbaissera du point M sur AB la perpendiculaire MP; & ayant nommé les données CB, ou CM, ou (Hyp.) HE, a; BG, b; & les indéterminées CP, x; PM, y; PG, ou MH sera $a+b-x$, & les triangles semblables CPM, MHE,

donneront x, (CP). y (PM) :: $a+b-x$ (MH). (HE), d'où l'on tire $ax = ay + by - xy$, qui est une équation à l'Hyperbole par raport à ses asymptotes. Et à cause du triangle rectangle CPM, l'on aura $xx + yy = aa$ qui est une équation au cercle.

Si l'on fait présentement évanouir l'inconnue y, l'on aura après avoir ordonné l'équation,

$$\begin{array}{lllll} x^4 - 2ax^3 & + aaxx & + 2a^3x & - a^4 & \\ \quad - 2b & + 2ab & + 2aab & - 2a^3b & = 0 \\ & + bb & & - aabb & \end{array}$$

Et si l'on fait évanouir x, (car il est à propos de faire évanouir les deux inconnues l'une après l'autre, pour voir si l'équation qui résulte d'une maniere n'est pas plus simple que celle qui résulte de l'autre) l'on aura.

$$\begin{array}{llll} y^4 + 2ay^3 & + aayy & - 2a^3y - a^4 & = 0 \\ & + 2ab & & \\ & + bb & & \end{array}$$

qui paroit plus simple que la précédente. Mais comme ces deux équations sont du quatriême degré, & qu'on ne peut, ni par la division, ni par la transformation, les réduire à une équation du second; il suit que le Problême est solide, & parceque l'une des deux équations indéterminées appartient au cercle, on le construira par leur moyen en cette sorte.

Il est clair que l'équation $xx + yy = aa$, appartient au cercle donné AMB; c'est pourquoi il n'y a qu'à construire l'équation à l'Hyperbole $ax = ay + by - xy$; faisant donc pour la réduire $a + b - x = z$, l'on aura $x = a + b - z$; & mettant cette valeur de x dans l'équation, elle deviendra $aa + ab - az = yz$, ou $aa + ab = yz + az$; & faisant encore $y + a = u$, l'on aura l'équation réduite $aa + ab = uz$, qui fournit avec les réductions cette construction.

Le point C étant l'origine des inconnues x qui va vers G, & y parallele à GH; à cause de la premiere réduction $a + b - x = z$, le point G sera (Art. 16. n°. 4.) l'origine de z qui revient vers C. A cause de la seconde réduction

$y + a$

$y + a = u$, on prolongera HG, en O, & ayant fait $GO = a = CB$; le point O sera l'origine des inconnues z qui va vers L parallele à GC, & u qui va vers H, & le sommet de l'angle des asymptotes, qui seront OL & OH. Et à cause de l'équation réduite $aa + ab = uz$, dont la quantité connue $aa + ab = \overline{a + b} \times a = CG \times CB =$ (Const.) $CG \times GO$, l'on décrira (Art. 14.) par le centre C du cercle AMB, l'Hyperbole CM qui coupera le cercle au point cherché M.

DE'MONSTRATION.

AYANT prolongé MP jusqu'à l'asymptote OL en K, & mené CL parallele à PK, par la proprieté des asymptotes (Art. 14. n°. 1.) $OL \times LC = OH \times HM$; donc $CP \times PK = PM \times MH$; donc $CP . PM :: MH . PK$. Mais à cause des triangles semblables CPM, MHE, $CP . PM :: MH . HE$; donc $MH . PK :: MH . HE$; & partant PK ($= GO =$ (Const.) CB) $= HE$. C. Q. F. D.

EXEMPLE II.

Problême Solide.

2. *DIVISER un arc de cercle donné* BDC, *dont le centre est* A, *& la corde* BC, *en trois parties égales* BD, DF, FC. FIG. 97.

Ayant supposé le Problême résolu, les cordes BD, DF, FC seront égales; celle du milieu DF sera parallele à BC; le rayon AE, perpendiculaire à BC sera aussi perpendiculaire à DF, & les coupera toutes deux par le milieu en H & en G, & sa partie AH comprise entre le centre A, & la corde BC, sera donnée de grandeur, & de position: mais AG & GD ou GF seront indéterminées. Si l'on mene encore les deux rayons AD, AF, qui rencontrent BC en I & en K; HI sera $= HK$, & les triangles BDI, CFK seront égaux, semblables, & isosceles; puisque par l'Hypothese l'angle $IDB = IDF = AIK = BID$. Par

la même raiſon l'angle $KFC = KFD = IDF = AKI = CKF$; & qu'outre cela $BD = CF$.

Nommant donc les données AE, ou AD, ou AF, a; HB, ou HC, b; AH, c; & les inconnues AG, x; GD ou GF, y; DF, ou DB, ou BI ſera, $2y$; & partant HI, $b - 2y$.

A cauſe des triangles ſemblables AGD, AHI, l'on aura $x\,(AG) \,.\, y\,(GD) :: c\,(AH) \,.\, b - 2y\,(HI)$, d'où l'on tire $bx - 2xy = cy$, qui eſt une équation à l'Hyperbole par raport à ſes aſymptotes; & à cauſe du triangle rectangle AGD, l'on aura $xx + yy = aa$, qui eſt une équation au cercle du Problême BDC.

Si l'on fait préſentement évanouir une des deux inconnues renfermées dans les deux équations indéterminées que l'on vient de trouver, l'on aura une équation du quatriême degré qui ne peut être réduite à une équation du ſecond; d'où l'on doit conclure que le Problême eſt ſolide; ainſi on le peut conſtruire par le moyen des deux mêmes équations indéterminées. Mais l'équation au cercle ſe trouve conſtruite, puiſqu'elle ſe rapporte au cercle du Problême BDC. C'eſt pourquoi il n'y qu'à conſtruire l'équation à l'Hyperbole, qui étant réduite donne avec ſes réductions cette conſtruction.

Soit prolongée AH en L, en ſorte que $AL = \frac{1}{2} AH$, & menée par L une parallele à BC, ſur laquelle ayant pris $LO = \frac{1}{2} HB$, l'on menera par O la droite OM parallele à AG, qui rencontrera HB en X. L'Hyperbole AD décrite par le centre A entre les aſymptotes OL, OM, coupera l'arc BDC au point cherché D; de ſorte que ſi l'on mene DF parallele à BC, les points D & F diviſeront l'arc BDC en trois parties égales BD, DF, FC.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené par le point D, où l'Hyperbole AD coupe l'arc BDC, la droite DN parallele à l'aſymptote OM, qui rencontrera HB en V, & LO en N, & par le centre A, le diametre gAf parallele à l'aſymptote OL,

qui rencontrera OM en P, & ND en S. L'on aura à cause des asymptotes OL, OD; $DN \times NO = AL \times LO$; donc $SP \times SD = SA \times AL$; donc $DS . SA :: AL . SP$: mais les triangles semblables DSA; AHI donnent $DS . SA :: AH . HI$; donc $AL . SP :: AH . HI$. Or (const.) $AH = 2AL$; donc $HI = 2SP$; & partant HV, ou $GD = 2SP + IV$, & $DF = 4SP + 2IV$: mais HX ($= HV + SP$) $= 3SP + IV$; c'est pourquoi $BX =$ (const.) $HX = 3SP + IV$; & par conséquent $BX + XI$, ou $BI = 4SP + 2IV$; donc $BI = DF = KC$. Mais les triangles semblables AKI, AFD donnent $AK . KI :: AF . FD$, ou (ayant mené AB, AC) $AK . KI :: AB . BI$; d'où il suit que l'angle $BAD = CAF = DAF$. C. Q. F. D.

Si la corde BC passoit par le centre A, & étoit confondue avec le diametre gAf, l'arc BC seroit un demi cercle, & la perpendiculaire $AH = c$, seroit nulle ou $= 0$; c'est pourquoi, en effaçant dans l'équation à l'Hyperbole, les termes où c se rencontre, l'on auroit $y = \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} Ag$; d'où il suit qu'ayant divisé Ag par le milieu en R, mené RT perpendiculaire à Ag qui coupera le demi cercle en T, & TZ parallele à gf, les arcs gT, TZ, & Zf seront égaux. Ce qui est évident.

EXEMPLE III.

Problême Solide.

3. TROUVER *deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données* KL, MN. FIG. 98.

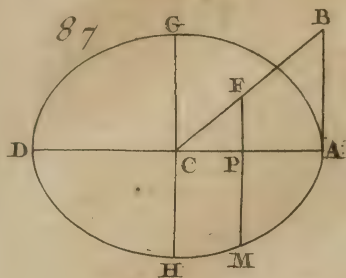
Ayant supposé le Problême résolu, & nommé les données KL, a; MN, b; & les inconnues x & y; l'on aura suivant les termes de la question $a . x :: x . y$, & $x . y :: y . b$, d'où l'on tire $ay = xx$, & $bx = yy$, qui sont deux équations à la Parabole; & faisant évanouir l'inconnue y, l'on aura $x^3 = aab$, qui est une équation du troisiême degré, & montre que le Problême est Solide.

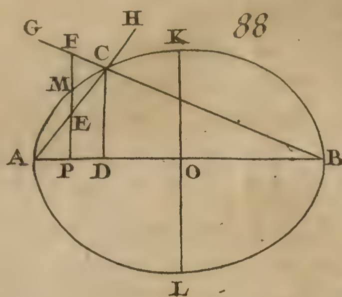
Mais parceque deux équations à la Parabole étant combinées par addition ou ſouſtraction, peuvent toujours donner une équation au cercle, attendu que l'équation à la Parabole ne renferme qu'un quarré inconnu qui peut toujours être délivré de toute quantité connue ; il ſuit qu'on peut conſtruire ce Problême par le moyen de l'une des deux équations précédentes, & de l'équation au cercle qui réſulte de la combinaiſon des deux mêmes équations par addition, qui eſt $ay + bx = xx + yy$.

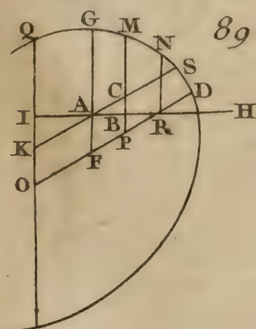
Et parceque les deux premieres équations $ay = xx$, & $bx = yy$ ſont également ſimples, on peut indifféremment ſe ſervir de celle qu'on voudra. Prenons donc la premiere $ay = xx$. Pour la conſtruire, ſoit A l'origine des inconnues x qui va vers H, & y, qui va vers G perpendiculaire à AG ; le même point A ſera auſſi le ſommet de l'axe AG ; de la Parabole qu'il faut décrire, puiſque l'équation $ay = xx$, n'a pas beſoin de réduction ; il n'y a donc qu'à décrire (Art. 10. n°. 11.) ſur l'axe AG une Parabole dont le parametre ſoit la ligne donnée $KL = a$.

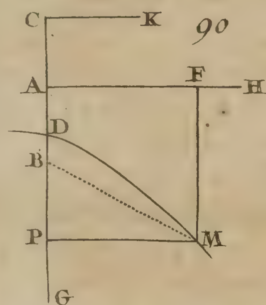
Pour conſtruire préſentement l'équation au cercle $ay + bx = xx + yy$; ſoit fait pour la réduire $y - \frac{1}{2}a = u$, & $x - \frac{1}{2}b = z$; & l'on aura l'équation réduite $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - uu = zz$, qui avec les réductions donne cette conſtruction.

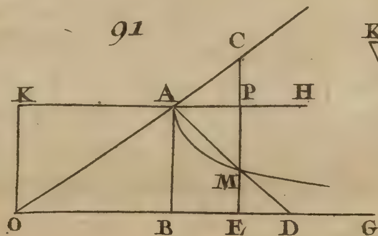
Le point A étant toujours l'origine des inconnues y & x ; à cauſe de la premiere réduction $y - \frac{1}{2}a = u$, l'on prendra $AC = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}KL$, & ayant mené CO parallele à AD ; à cauſe de la ſeconde réduction $x - \frac{1}{2}b = z$, on prendra ſur CO, $CE = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}MN$, & le point E ſera l'origine des inconnues z, qui va vers O, & u, parallele à AG, & le centre du cercle qu'il faut décrire : mais $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb}$, qui eſt la racine du terme connu de l'équation réduite, eſt le demi diametre du même cercle ; c'eſt pourquoi ſi du centre E par A on décrit un cercle,

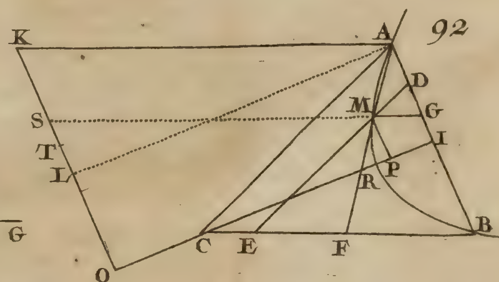

87
G
B
F
D
C
P
A
H
M

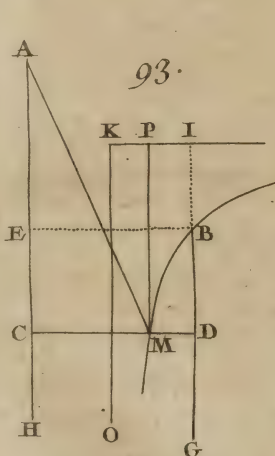

88
G
H
F
C
K
M
E
A
P
D
O
B
L

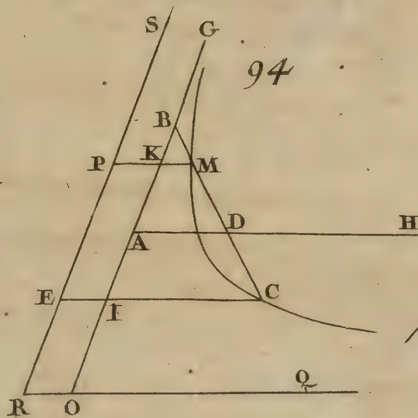

89
Q
G
M
N
S
C
D
A
I
H
B
R
K
P
F
O

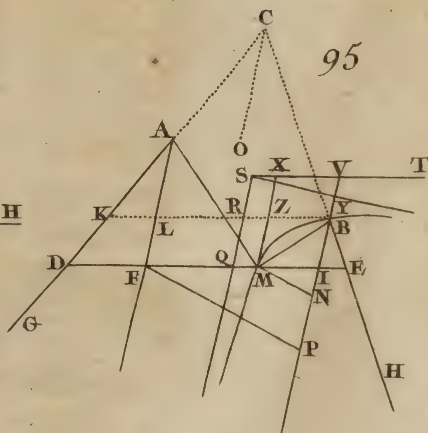

90
C
K
A
F
H
D
B
P
M
G

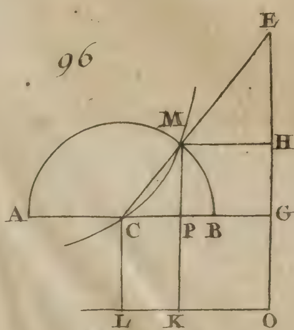

91
C
K
A
P
H
M
O
B
E
D
G

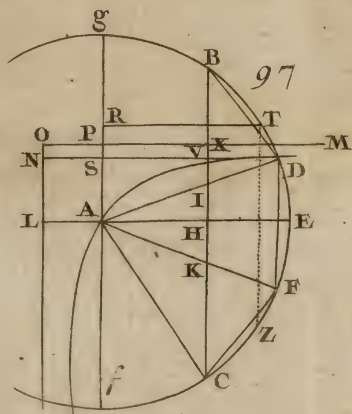

92
K
A
D
M
G
S
I
T
L
P
R
B
C
E
F
O

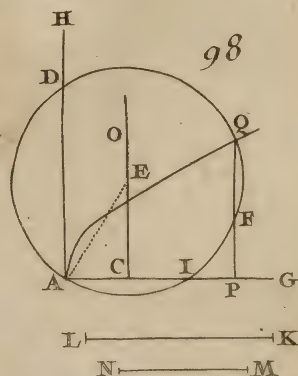

93
A
K
P
I
E
B
C
M
D
H
O
G

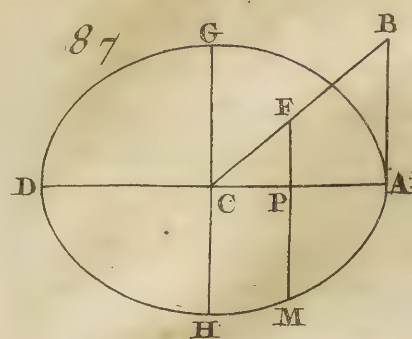

94
S
G
B
P
K
M
D
H
A
E
I
C
R
O
Q

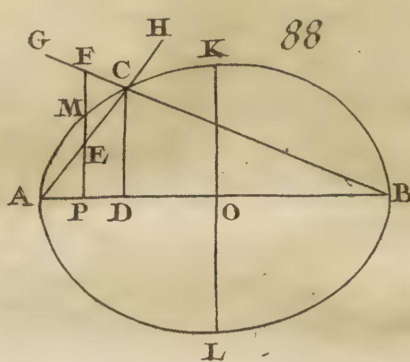

95
C
A
O
S
X
V
T
K
R
Z
Y
L
B
D
Q
F
M
I
E
N
P
G
H

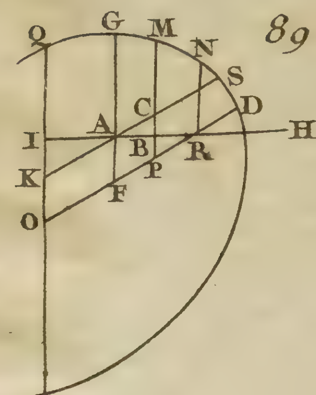

96
E
M
H
A
C
P
B
G
L
K
O

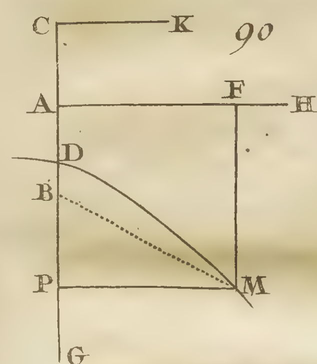

97
g
B
R
T
O
P
M
N
V
X
D
S
A
I
L
E
H
K
F
Z
f
C

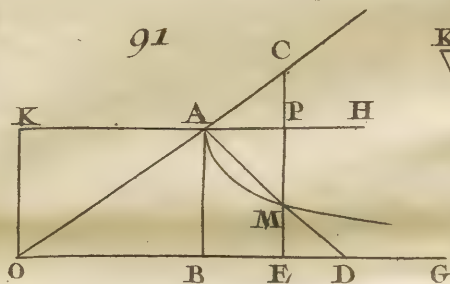

98
H
D
O
Q
E
F
C
I
A
P
G
L
K
N
M

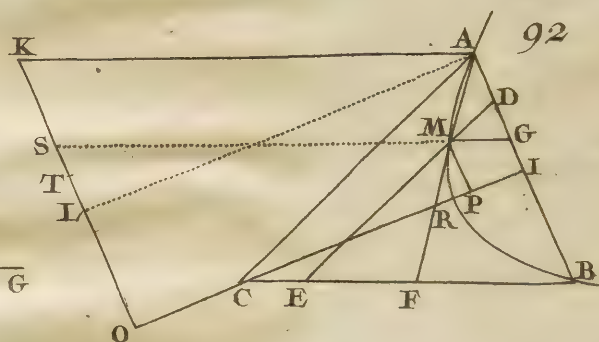

87
G B F D C P A H M

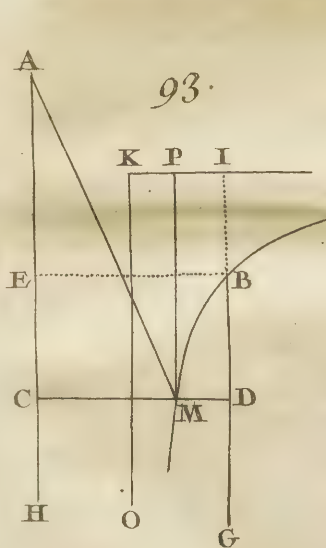

88
G F H C K M E A P D O B L

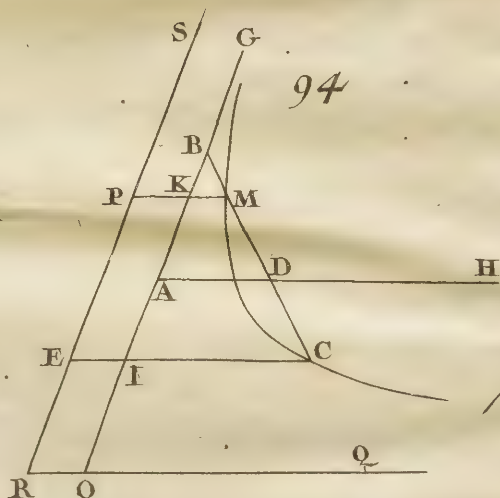

89
Q G M N S C D A H I B R K P F O

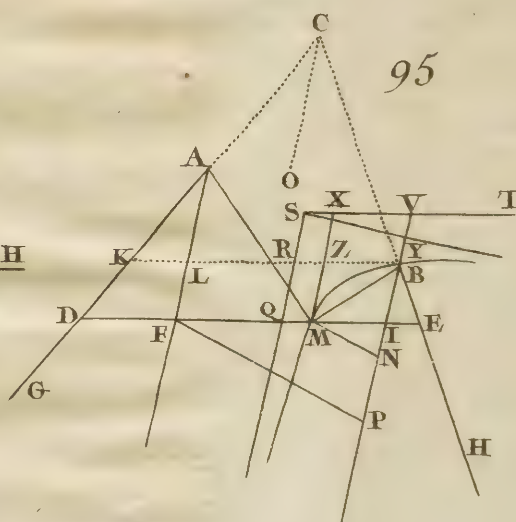

90
C K A F H D B P M G

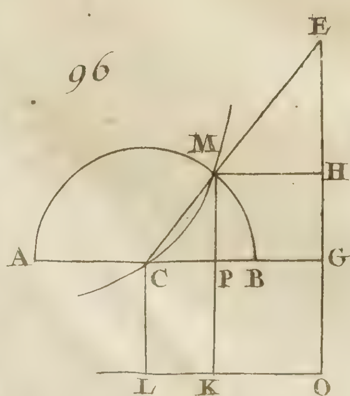

91
C K A P H M O B E D G

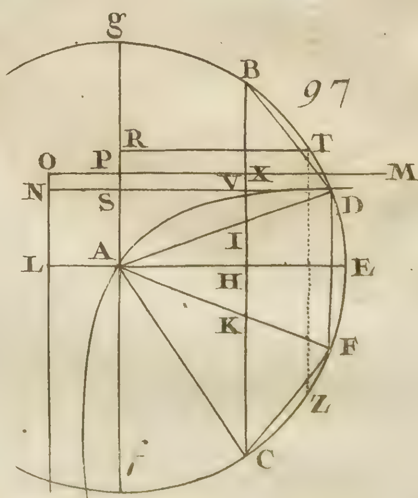

92
K A D S M G T I L P R B C E F O

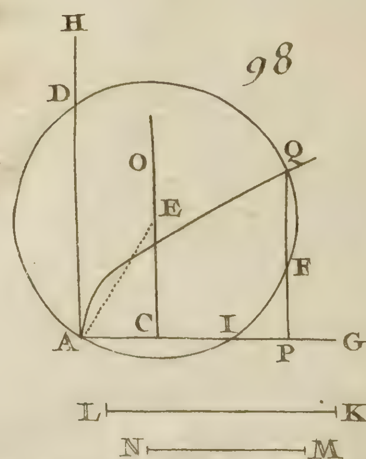

93.
A K P I E B C M D H O G


94
S G B P K M D H A E I C Q R O


95
C A O S X V T K R Z Y L B D Q E F M I N G P H


96
E M H A C P B G L K O


97
g B R T O P M N V X S D L A I E H K F Z C


98
H D O Q E F C I A P G L K N M

il coupera la Parabole en un point Q, par où ayant mené QP parallele AH; PQ & PA seront les deux moyennes proportionnelles qu'il faloit trouver.

DE'MONSTRATION.

IL est clair que le cercle coupe AG & AH en I & en D, de maniere que $AI = 2AC = KL = a$, & $AD = 2CE = MN = b$. Ainsi $PI = PA - AI = y - a$, & $PF = AD - PQ = b - x$. Or par la propriété du cercle $AP \times PI = PQ \times PF$, ou en termes algebriques, $yy - ay = bx - xx$, ou $yy - bx = ay - xx$: : mais (Art. 10) $ay = xx$; donc $yy - bx = 0$, ou $yy = bx$. Or $ay = xx$ donne AI, ou $KL . PQ :: PQ . PA$, & $yy = bx$ donne $PQ . PA :: PA . AD$, ou MN; donc KL, PQ, PA, & MN sont continuellement proportionnelles. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE IV.

Problême Solide.

4. U*NE courbe* AM, *dont l'axe est* AP, *son sommet* A, *& un point* D *au-dedans ou au-dehors de cette courbe, étant donnez de position sur un Plan, il faut mener du point* D *une ligne droite* DMC, *qui coupe la courbe* AM, *ou sa tangente au point* M *à angles droits.* FIG. 99.

Ayant supposé le Problême résolu, soient menées les droites DB & MP perpendiculaires à AC; du point M la droite ME parallele à AC, qui rencontrera DB en E; & par le point M la tangente MT. Nommant présentement les données AB, b; DB, c; & les indéterminées AP, x; PM, y; & PT, t; BP ou ME sera $b + x$, si le point B est hors de la courbe, & DE, $c - y$.

Langle CMT étant droit par l'Hypothese, les triangles MPT, CPM & MED seront semblables; c'est pourquoi l'on aura $y\,(MP) . t\,(PT) :: x + b\,(EM) . c - y\,(ED)$; donc $cy - yy = tx + bt$, qui est une équation générale pour toutes les courbes AM, & que l'on déterminera à

telle courbe que l'on voudra, en y ſubſtituant en la place de t, l'expreſſion de la ſoutangente PT.

Si l'on veut par exemple que la courbe AM ſoit une Parabole; PT ſera (Art. 11. nº. 6.) $= 2x = t$; c'eſt pourquoi en mettant pour t ſa valeur $2x$, l'on aura $cy - yy = 2xx + 2bx$, qui eſt une équation à l'Ellipſe; & nommant le parametre de la Parabole a, l'on aura (Art. 10.) $ax = yy$, qui eſt l'équation à la Parabole AM.

Si l'on fait évanouir x, l'on aura une équation du troiſiême degré, qui ne peut être réduite; & par conſéquent le Problême propoſé eſt ſolide. Mais lorſqu'on a une équation à la Parabole, & une à l'Ellipſe, ou à l'Hyperbole par raport à ſes diametres où les inconnues ne ſe multiplient point, on peut toujours par leur moyen trouver une équation au cercle en cette ſorte.

Après avoir délivré dans l'équation à l'Ellipſe, ou à l'Hyperbole, le quarré de l'inconnue qui n'eſt point quarrée dans l'équation à la Parabole, de toute quantité connue, l'on fera évanouir le quarré de l'autre inconnue, & l'équation qui en reſultera ſera une équation à la Parabole, qui étant combinée avec la premiere par addition, ou ſouſtraction, donnera une équation au cercle. Ainſi en diviſant par 2 l'équation précédente $cy - yy = 2xx + 2bx$, l'on a $\frac{1}{2}cy - \frac{1}{2}yy = xx + bx$, & mettant pour yy ſa valeur ax, priſe dans l'équation à la Parabole $ax = yy$; l'on aura $\frac{1}{2}cy - \frac{1}{2}ax = xx + bx$, qui eſt une autre équation à la Parabole; & en combinant par addition ces deux équations à la Parabole, l'on aura $\frac{1}{2}cy - \frac{1}{2}ax + ax = xx + bx + yy$, ou $\frac{1}{2}cy + \frac{1}{2}ax = xx + bx + yy$, qui eſt une équation au cercle.

Quoique l'on pût conſtruire le Problême par le moyen de l'équation au cercle, & de la ſeconde équation à la Parabole; il eſt néanmoins à propos de ſe ſervir de la premiere $ax = yy$, parcequ'elle appartient à la Parabole don-

née AM qui ſe trouve toute conſtruite ; c'eſt pourquoi il ne reſte qu'à conſtruire l'équation au cercle, afin que le Problême ſoit entierement réſolu.

L'équation au cercle étant réduite, donne avec les réductions, cette conſtruction.

Ayant pris $AF = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a$, on menera FG parallele BD & $= \frac{1}{4}c$, & du centre G par A, l'on décrira un cercle qui coupera la Parabole au point cherché M.

DE'MONSTRATION.

AYANT joint GA, & mené GI parallele à AP, qui rencontrera PM en H, & la circonférence du cercle en I, l'on aura par la proprieté du cercle, GA^2 ou $GI^2 - GH^2 = HM^2$, ou en termes algebriques $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}ab + \frac{1}{16}aa + \frac{1}{16}cc - xx - bx - \frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}ab - \frac{1}{16}aa = yy - \frac{1}{2}cy + \frac{1}{16}cc$, qui ſe réduit à $xx + bx - \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}cy - yy$. L'on a auſſi par la propriété de la Parabole $ax = yy$, qui étant combinée par addition avec l'équation précédente donne $xx + bx + \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}cy$, ou $2xx + 2bx = cy - yy$ (en mettant pour ax ſa valeur yy, en multipliant par 2, & tranſpoſant) qui eſt l'équation que l'on a conſtruite. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE V.

Problême Solide.

5. *IL faut décrire un triangle* CBD *rectangle en* B, *dont on* FIG. 100. *connoît le plus grand* ED *des deux ſegmens de la baſe faits par la perpendiculaire* BE, *qui tombe de l'angle droit* B *ſur la baſe* CD, *& la différence* DF *des côtez.*

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé les données ED, a ; DF, b ; & les inconnues EC, x ; CB, ou

BF, y; CD ſera $x+a$; & BD, $y+b$; l'on aura à cauſe des triangles rectangles CEB, BED, $CB^2 - CE^2 = DB^2 - DE^2$, & en termes algebriques $yy - xx = yy + 2by + bb - aa$, ou $xx = aa - 2by - bb$, qui eſt une équation à la Parabole.

A cauſe des triangles ſemblables DCB, BCE, l'on aura $a+x$ (DC). y (CB) :: y. x (CE); donc $yy = ax + xx$, qui eſt une équation à l'Hyperbole équilatere.

Si l'on fait préſentement évanouir l'une des deux inconnues, on aura une équation du quatriême degré qui ne pouvant être réduite à une équation du ſecond, montre que le Problême eſt ſolide.

Or quoique les lignes exprimées par les deux inconnues x & y, n'ayent point les qualitez dont il eſt parlé dans la premiere Obſervation de l'Article 4. Neanmoins, parceque l'on peut toujours trouver une équation au cercle quand on a deux équations indéterminées du ſecond degré où les deux inconnues ne ſont point multipliées entr'elles, quoiqu'il n'y en ait aucune des deux à la Parabole, on peut par leur moyen conſtruire le Problême, comme on va voir par cet exemple.

La ſeconde équation $yy = ax + xx$ donne $xx = yy - ax$, & mettant cette valeur de xx dans la premiere équation $xx = aa - 2by - bb$, qui eſt à la Parabole, l'on aura $yy - ax = aa - 2by - bb$, qui eſt une autre équation à la Parabole; & en ajoutant les deux premiers & les deux ſeconds membres de ces deux équations à la Parabole, l'on aura $xx + yy - ax = 2aa - 4by - 2bb$, ou $xx - ax + yy + 4by = 2aa - 2bb$, qui eſt une équation au cercle.

Pour réduire cette équation, ſoit fait $x - \frac{1}{2}a = z$ & $y + 2b = u$; l'on aura $zz = \frac{9}{4}aa + 2bb - uu$, qui avec les réductions fournit cette conſtruction.

Soit le point A l'origine des inconnues x, qui va vers G, & y qu'on ſuppoſe perpendiculaire à AG; & qui va en haut. A cauſe de la premiere réduction $x - \frac{1}{2}a = z$, on prendra

prendra $AR = \frac{1}{2} a$, & ayant mené par R la perpendiculaire RO; à cauſe de la ſeconde réduction $y + 2b = u$, l'on prendra $RO = 2b$; & le point O ſera le centre du cercle qu'il faut décrire; à cauſe de $2bb$, on prendra RI moyenne proportionnelle entre $2b$, & b; & du centre O, & du rayon IH, que l'on déterminera en prolongeant RA en H, en ſorte que $AH = a$, l'on décrira un cercle.

Pour conſtruire préſentement l'une des deux équations à la Parabole, par exemple la ſeconde $yy - ax = aa - 2by - bb$, ou $yy + 2by = ax + aa - bb$; ſoit fait pour la réduire $y + b = ſ$, & $x + a = t$, & l'on aura $ſſ = at$, qui donne avec ſes réductions cette conſtruction. A cauſe de la ſeconde réduction $x + a = t$, l'on prolongera AG du côté de A en H, en ſorte que $AH = a$, & ayant mené HK perpendiculaire à AH; à cauſe de la premiere réduction $y + b = ſ$; on prendra $HK = b$, l'on menera KS parallele à AG, & l'on décrira (Art. 10. n°. 11.) ſur l'axe KS, dont le ſommet eſt K, une Parabole par le moyen de l'équation réduite $ſſ = at$. Cette parabole coupera le cercle en deux points M & N, de maniere qu'ayant abbaiſſé des points M & N les perpendiculaires MP, NQ; PM ſera la valeur poſitive de $y = CB$; NQ, ſa valeur négative; & AP, la valeur de $x = EC$. De ſorte que ſi l'on fait $EC = AP$, & qu'on décrive ſur le diametre DC un demi cercle dans lequel ayant ajuſté $CB = PM$, & mené BD, le triangle CBD ſera celui qu'il faloit décrire. FIG. 100. 101.

DE'MONSTRATION.

AYANT joint IH & mené par le centre O le diametre VOT parallele à AG qui rencontrera MP prolongée en X de part ou d'autre du point O. Par la conſtruction, & par la propriété du cercle, l'on aura IH^2, ou OV^2, ou $OT^2 - OX^2 = XM^2$, ou en termes algebriques $\frac{9}{4} aa +$

$2bb - xx + ax - \frac{1}{4}aa = yy + 4by + 4bb$, ou $2aa - xx + ax = yy + 4by + 2bb$.

Par la propriété de la Parabole *KM* dont le parametre eſt a, l'on aura $a \times KL = LM^2$, ou $ax + aa = yy + 2by + bb$, ou en ſouſtrayant la ſeconde équation de la premiere, le premier membre du premier ; & le ſecond du ſecond, l'on aura $aa - xx = 2by + bb$, qui eſt la premiere équation du Problême, & en ſouſtrayant cette équation de la précédente, chaque membre de chaque membre, l'on aura $ax + xx = yy$, qui eſt la ſeconde équation du Problême. *C. Q. F. D.*



SECTION X.

Où l'on donne la Méthode de construire les Problêmes Solides par le moyen de leurs équations déterminées ; ou ce qui est la même chose, de construire les équations déterminées du troisiême, & du quatriême degré.

MÉTHODE.

XXIV. SOIT qu'on ait employé deux ou plusieurs lettres inconnues, ou qu'on n'en ait employé qu'une pour résoudre un Problême, quand on est venu à une équation déterminée du troisiême ou du quatriême degré, qui ne peut être réduite à une équation du second, le Problême est necessairement Solide, comme on a déja dit ailleurs, & on le pourra toujours construire par le moyen de cette équation, en observant les régles qui suivent.

1. Si l'équation a un second terme, on le fera premierement évanouir. Cela fait

2. Si l'équation est du troisiême degré, on la multipliera par l'inconnue qu'elle renferme pour la rendre du quatriême.

3. On formera une équation à la Parabole dont un des membres sera le quarré de la lettre inconnue de l'équation que l'on veut construire, & l'autre membre sera le produit d'une autre lettre inconnue par une lettre connue quelconque, ou plutôt par une des lettres connues qui se trouve le plus fréquemment dans l'équation à construire : car par ce moyen on rend la construction un peu plus simple.

4. On fera évanouir l'inconnue de l'équation à construire dans le premier & dans le troisiême terme : (car on

suppose qu'elle n'en a point de second) en substituant en sa place, sa valeur prise dans l'équation à la Parabole que l'on a formée, & l'équation qui en résultera sera une autre équation à la Parabole.

5. On combinera par addition ou soustraction ces deux équations à la Parabole, de maniere que l'équation qui en résulte soit une équation au cercle.

6. On construira l'équation au cercle, & la plus simple des deux équations à la Parabole, comme dans la Section précédente, en supposant que les lignes exprimées par les deux inconnues font un angle droit, & les intersections de ces deux courbes donneront les racines, ou valeurs tant positives que négatives de l'inconnue de l'équation à construire. Tout ceci sera éclairci par les exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

Problême Solide.

7. TROUVER *une ligne dont le cube soit au cube d'une ligne donnée* CD, *dans la raison donnée de* m *à* n.

Ayant supposé le Problême résolu, & nommé la donnée *CD*, a; & l'inconnue x, l'on aura par la condition du Problême $x^3 . a^3 :: m . n$, d'où l'on tire $x^3 = \frac{ma^3}{n}$, qui est une équation du troisiême degré, qui ne pouvant être réduite à une équation du second; il suit que le Problême est Solide.

En multipliant cette équation par x, l'on aura $x^4 = \frac{ma^3x}{n}$, & faisant (n°. 3.) $ay = xx$, qui est une équation à la Parabole, l'on a $aayy = x^4$; & mettant dans l'équation à construire pour x^4 sa valeur $aayy$, l'on aura $aayy = \frac{ma^3x}{n}$, ou $yy = \frac{max}{n}$, qui est une autre équation à la Parabole. Et combinant ces deux équations à

la Parabole par addition ou soustraction, l'on aura $yy - ay = \frac{max}{n} - xx$, qui est une équation au cercle dont la construction jointe avec celle de l'équation à la Parabole $ay = xx$, résoudra le Problême.

Soit le point A l'origine des inconnues y qui va vers G, & x qui lui est perpendiculaire. Et soit décrite (Art. 10. n°. 11). sur l'axe AG dont le sommet est A la Parabole AH, dont la parametre soit $a = CD$. Cette Parabole sera celle dont l'équation est $ay = xx$. FIG. 102.

L'équation au cercle étant réduite donnera avec les réductions cette construction.

Ayant pris sur AG, $AI = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} CD$, on élevera au point I la ligne IK perpendiculaire à AG & égale à $\frac{ma}{2n}$, & du centre K par A, l'on décrira un cercle qui coupera la parabole AH au point M, par où l'on menera la droite MP parallele à IK; je dis que MP exprimée par x, qui est l'inconnue de l'équation $x^3 = \frac{ma^3}{n}$ que l'on vient de construire, est le côté du cube qu'il faloit trouver.

DE'MONSTRATION.

AYANT joint AK, & mené KOR parallele à AP qui rencontrera le cercle en R, & PM en O. L'on a par la proprieté du cercle KA^2, ou $KR^2 - KO^2 = OM^2$, ce qui est en termes algebriques $\frac{1}{4} aa + \frac{mmaa}{4nn} - yy + ay - \frac{1}{4} aa = xx - \frac{max}{n} + \frac{mmaa}{4nn}$, qui devient $ay - yy = xx - \frac{max}{n}$. Mais à cause de la Parabole l'on a (Art. 10.) $ay = xx$; donc $yy = \frac{x^4}{aa}$; mettant donc dans l'équation précédente pour ay, sa valeur xx, & pour yy, sa

valeur $\frac{x^4}{aa}$, l'on aura après les réductions ordinaires $x^3 = \frac{ma^3}{n}$. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE II.

Problême Solide.

FIG. 103. 8. DIVISER *un arc de cercle* BDFC *en trois parties égales* BD, DF, FC.

Ayant supposé le Problême résolu; puisque par l'Hypothese les arcs *BD*, *DF*, *FC*, sont égaux, les cordes *BD*, *FD*, *FC* seront aussi égales, & *DF* sera parallele à *BC*. Ayant mené les rayons *AB*, *AD*, *AF*, *AC*, & outre cela la ligne *FI* parallele à *AD*; les triangles *ADB*, *ADF*, *AFC* seront égaux, semblables & isosceles, comme aussi les triangles *BHD*, *CKF*: car l'angle *CFK* ($= KFD = AKH$) $= CKF$. Par la même raison l'angle $BDH =$ l'angle *BHD*; c'est pourquoi, puisque (Hyp.) $CF = DB$; *CK* sera $= BH$. Mais les triangles *ACF*, *CFK*, *FKI*, sont aussi semblables & isosceles: car à cause des paralleles *AD*, *IF*, l'angle *KIF* ($= BHD$) $= IKF = KFC = FCA$.

En nommant présentement le rayon *AC*, a; la donnée *BC*, b, & l'inconnue *CF*, ou *CK*, ou *IH*, ou *HB*, x; l'on aura $AC\,(a) . CF\,(x) :: CF\,(x) . FK = \frac{xx}{a}$, & $CF\,(x) . FK\left(\frac{xx}{a}\right) :: FK\left(\frac{xx}{a}\right) . KI = \frac{x^3}{aa}$, donc $CI = x - \frac{x^3}{aa}$; & partant $CB = IB + CI = 2x + x - \frac{x^3}{aa} = b$; d'où l'on tire $x^3 = 3aax - aab$, qui est une équation du troisiême degré, & qui ne pouvant être réduite à une équation du second, fait connoître que le Problême est solide.

Pour le construire, soit premierement l'équation précédente multipliée par son inconnue x, & l'on aura $x^4 = 3aaxx - aabx$; & ayant fait $ay = xx$, l'on aura $aayy = x^4$.

Mettant donc dans l'équation du Problême, pour x^4, & pour xx, leurs valeurs $aayy$, & ay; l'on aura après avoir divisé par aa, $yy = 3ay - bx$, qui est une autre équation à la Parabole. Et en combinant par addition ou soustraction, ces deux équations à la Parabole, l'on aura après la réduction $yy - 4ay = - xx - bx$, qui est une équation au cercle, dont la construction jointe avec celle de l'équation à la Parabole $ay = xx$, résoudra le Problême.

Soit donc le point A l'origine des inconnues y qui va vers G, & x perpendiculaire à AG qui va vers B, & soit décrite (Art. 10. n°. 11.) sur l'axe AG, dont le sommet soit A, la parabole FAN dont le parametre soit $a =$ (Fig. 103.) AC. Cette Parabole sera celle dont l'équation est $ay = xx$. FIG. 103. 104.

L'équation au cercle étant réduite, donnera, avec les réductions, cette construction.

Soit prise $AI = 2a =$ (Fig. 103.) $2AC$, & ayant élevé IK perpendiculaire à AG & $= \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} BC$, l'on décrira du centre K par A, un cercle $AMNF$ qui coupera la Parabole aux points A, M, N, F, parmi lesquels il y en a trois M, N, & F dont on peut tirer des perpendiculaires MP, NQ, FE sur l'axe AG de la Parabole, qui sont les trois racines de l'inconnue x de l'équation du Problême, deux desquelles PM, & QN sont positives, & la troisiême EF, negative, de sorte que PM sera la corde du tiers de l'arc $BDFC$ qu'il faloit diviser; & QN, la corde du tiers du reste du cercle BVC.

DE'MONSTRATION.

PAR la proprieté de la parabole l'on a (Art. 10.) $ay = xx$. Ayant joint KA, & mené le diametre ZKR parallele à AG; l'on aura par la proprieté du cercle KA^2, ou $KR^2 - KT^2 = TN^2$, ou $KZ^2 - KX^2 = XM^2$, ou en termes algebriques, $4aa + \frac{1}{4} bb - yy + 4ay - 4aa = xx + bx + \frac{1}{4} bb$, ou $4ay - yy = xx + bx$; & en remettant pour ay, & pour yy leurs valeurs xx, & $\frac{x^4}{aa}$ prises FIG. 104.

dans l'équation à la Parabole $ay = xx$, l'on aura, après les réductions, $x^3 = 3aax - aab$. *C. Q. F. D.*

REMARQUE I.

9. S'IL y avoit un second terme dans l'équation que l'on vient de construire, il auroit falu avant toutes choses le faire évanouir ; & alors l'inconnue x, qui exprime la corde CF (Fig. 103.), ne se seroit plus trouvée dans l'équation à construire ; c'est pourquoi les perpendiculaires PM, QN, ne seroient égales aux cordes du tiers des arcs BFC, BVC, qu'après les avoir augmentées ou diminuées de la quantité connue de l'équation qui auroit servi à faire évanouir le second terme ; ce qui n'auroit apporté aucune difficulté.

REMARQUE II.

FIG. 104. 10. LES valeurs positives de x, PM & QN sont ensemble égales à la négative EF. Ce que je démontre en cette sorte. On les prolongera en sorte qu'elles rencontrent le cercle en L, S & H, & le diametre ZR en X, T & O. Ayant nommé le parametre AB de la Parabole AM, a ; la corde AG, qui est l'axe de la même Parabole, b ; IK, ou PX, ou EO, c ; PM, x ; QN, y ; & FE, z ; PL sera, $2c + z$; QS, $2c + y$; & EH, $z - 2c$. AP sera (Art. 10.) $\frac{xx}{a}$; AQ, $\frac{yy}{a}$; AE, $\frac{zz}{a}$; & partant PG, $b - \frac{xx}{a}$; QG, $b - \frac{yy}{a}$; EG, $b - \frac{zz}{a}$.

DÉMONSTRATION.

L'ON a par la proprieté du cercle.

$$1.\ AP \times PG = \frac{abxx - x^4}{aa} = 2cx + xx = MP \times PL.$$

$$2.\ AQ \times QG = \frac{abyy - y^4}{aa} = 2cy + yy = NQ \times QS.$$

$$3.\ AE \times EG = \frac{abzz - z^4}{aa} = zz - 2cz = HE \times EF.$$

On

On tire de la premiere équation,

$ab = \frac{x^3 + 2aac + aax}{x}$, & ſubſtituant cette valeur de ab

dans la ſeconde & troiſiême, l'on aura après les réductions $x^3y + 2aacy = y^3x + 2aacx$, & $x^3z + 2aacz = z^3x - 2aacx$, d'où l'on tire $2aac = xyy + xxy$, & $2aac = xzz - xxz$; donc $yy + xy = zz - xz$, d'où l'on tire $x = z - y$, donc $x + y = z$. *C. Q. F. D.*

On démontreroit de même que, ſi le cercle coupoit la Parabole en quatre points, les ordonnées qui partiroient des points d'interſection d'un côté de l'axe ſeroient enſemble égales aux ordonnées qui partiroient des points d'interſection de l'autre côté de l'axe. Soit qu'il en eût deux d'un côté, & deux de l'autre, ou trois d'un côté, & une de l'autre.

Ce ſeroit encore la même choſe, ſi le cercle touchoit la Parabole d'un côté de l'axe, & la coupoit en deux points de l'autre côté : car le point touchant doit être regardé comme deux points d'interſection infiniment proches. Ainſi, le double de l'ordonnée qui partiroit du point touchant, ſeroit égal à la ſomme des deux ordonnées qui partiroient des deux points d'interſection qui ſeroient de l'autre côté de l'axe.

EXEMPLE III.

Problême Solide.

11. SOIT encore le Problême propoſé dans la Section précedente, Exemple 5, où l'on a trouvé ces deux équations $xx = aa - 2by - bb$, & $yy = ax + xx$.

Si l'on fait évanouir y, l'on aura

$$A \,.\; \begin{array}{l} x^4 - 2aaxx + 4abbx + a^4, \\ \quad\; - 2bbxx \qquad\qquad\; - 2aabb = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; + b^4 \end{array}$$

qui n'a point de ſecond terme.

Si au lieu de faire évanouir y, l'on fait évanouir x, l'on aura.

$$B.\ y^4 + 4by^3 + 6bbyy + 4b^3y + b^4 = 0.$$
$$-2aayy - 2aaby - aabb$$

d'où faiſant évanouir le ſecond terme, en faiſant $y + b = z$, l'on aura

$$C.\ z^4 - 2aazz + 2aabz - aabb = 0.$$

Et comme cette équation eſt plus ſimple que l'équation A, il vaut mieux s'en ſervir pour conſtruire le Problême, que de l'équation A. Faiſant donc

$D.\ au = zz$, l'on aura $aauu = z^4$, & mettant les valeurs de zz & de z^4 dans l'équation C, l'on aura après avoir diviſé par aa,

$E.\ uu - 2au + 2bz - bb = 0$, qui eſt une équation à la Parabole.

Si l'on ajoute le ſecond membre de l'équation D au premier de l'équation E; & le premier au ſecond, l'on aura $uu - 2au + zz + 2bz - bb = au$, ou

$F.\ uu - 3au + zz + 2bz - bb = 0$, qui eſt une équation au cercle.

FIG. 101. Si l'on réduit l'équation F, & qu'on la conſtruiſe avec l'équation D. En prenant le point K pour l'origine des inconnues u qui va vers S, & z qui lui eſt perpendiculaire, & va en haut, on retombera dans la conſtruction de la Section précedente n°. 5.

DEMONSTRATION.

PAR la conſtruction du Problême 5. (Sect. prec.) KL, ou $HP = x + a$; & $LM = y + b$; & par cette conſtruction $KL = u$, & $LM = z = y + b$; mettant donc dans ces deux équations D & F pour u, ſa valeur $x + a$, & pour z ſa valeur $y + b$, l'on aura ces deux équations.

$G.\ aa + ax = yy + 2by - bb$, &

$H.\ xx = aa - 2by - bb$, qui eſt la premiere équation de l'exemple 5, Sect. prec. & en ajoutant les deux équations G & H, le premier membre au premier, & le ſecond au ſecond, l'on aura, après les réductions,

K. $xx + ax = yy$, qui eſt la ſeconde équation du même Exemple. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

12. PAR le moyen de cette conſtruction, l'on ne détermine que la grandeur du côté $CB = PM$, au lieu que par la conſtruction de la Section précedente, l'on a auſſi déterminé la grandeur de $CE = AP$, d'où l'on voit que lorſque l'on conſtruit un Problême ſolide par le moyen de ſon équation déterminée, il n'eſt pas entierement réſolu. Il faut encore pour cela réſoudre & conſtruire un autre Problême ſimple ou Plan ; au lieu que lorſqu'on le conſtruit par le moyen de ſes deux équations indéterminées, il eſt entierement réſolu : car les valeurs des deux inconnues ſe trouvent toujours déterminées. FIG. 100. 101.

Ainſi pour achever de réſoudre le Problême, en ſuppoſant qu'on n'a déterminé que le côté CB par la conſtruction précedente ; ſoit encore CE nommé x ; & BD, c ; l'on aura par la proprieté du triangle rectangle $x + a$ (CD). c (BD) :: c (BD). a DE, d'où l'on tire $x = \frac{bb}{a} - a$, qui ſervira à déterminer la grandeur CE, & le Problême ſera entierement réſolu.

REMARQUES GENERALES

Sur la conſtruction des Problêmes Solides.

13. LES conſtructions du deuxiême & cinquiême exemples de la Section précedente, comparées avec les conſtructions du ſecond & du troiſiême de cette Section ; font voir qu'il eſt plus à propos de conſtruire les Problêmes ſolides avec deux équations indéterminées, qu'avec une équation déterminée, lorſqu'on le peut. Or on le peut toujours lorſque l'une des équations indéterminées ſe rapporte au cercle, ou bien lorſque les deux lettres inconnues ne ſe multiplient point dans les deux mêmes équations indéterminées : car en ce cas on trouvera toujours une équation au cercle, comme on a fait dans cet exemple.

On voit auſſi qu'il n'eſt pas abſolument neceſſaire que les deux lettres inconnues ayent les qualitez marquées dans la premiere Obſervation de l'article 4. On peut même les placer de differentes manieres, & chercher à chaque fois deux équations : car on trouve ſouvent des équations plus ſimples en les plaçant d'une maniere, qu'en les plaçant d'une autre.

14. Quoiqu'on n'ait employé dans cette Section que le cercle & la Parabole pour la conſtruction des Problêmes ſolides, cela n'empêche pas qu'on ne puiſſe les conſtruire avec celle qu'on voudra des Sections coniques : car on peut tirer d'une équation déterminée du troiſiême & du quatriême degré des équations à l'Ellipſe, & à l'Hyperbole comme on en a tiré une équation au cercle, avec cette difference ſeule qu'on ne peut tirer d'une équation du quatriême degré, une équation à l'Hyperbole par raport à ſes aſymptotes, & qu'on la peut tirer d'une équation du troiſiême.

Soit par exemple $A. x^3 = 3aax - aab$, qui eſt l'équation de l'exemple 2.

En ſuppoſant $B. ay = xx$, & mettant en la place de xx ſa valeur ay, l'on aura $C. xy = 3ax - b$, qui eſt une équation à l'Hyperbole par raport à ſes aſymptotes. Et multipliant l'équation C par x, & mettant enſuite pour xx, ſa valeur ay dans le premier terme, l'on aura $D. yy = 3xx - bx$, qui eſt une équation à l'Hyperbole par raport à ſes diametres, comme celle de l'Art. 14. nº. 13. & mettant encore pour xx ſa valeur ay dans l'équation D; il viendra $E. yy = 3ay - bx$, qui eſt une équation à la Parabole. En ajoutant les deux membres des deux équations B & E, le premier au premier, & le ſecond au ſecond, l'on aura $yy = xx + 2ay - bx$, qui eſt une équation à l'Hyperbole équilatere. Si l'on ajoute le ſecond membre de l'équation B au premier de l'équation E, & le premier au ſecond, l'on aura $yy + xx = 4ay - bx$, qui eſt une équation au cercle. Si on multiplie l'équation B par un nombre quelconque entier ou rompu, ou par une fraction

litterale, comme $\frac{a}{b}$, avant que de la combiner avec l'équation *F*, comme on vient de faire; l'on aura une équation à l'Hyperbole, & une à l'Ellipſe.

On peut de même combiner deux des équations précedentes priſes à volonté, & enſuite celles qui réſultent de ces combinaiſons, ce qui donnera une infinité d'équations aux Sections coniques, de l'une deſquelles on pourra ſe ſervir avec l'équation au cercle.

15. On tirera de la même maniere d'une équation du quatriême degré qui n'a point de ſecond terme, des équations aux Sections coniques, & une au cercle : mais on n'en trouvera point à l'Hyperbole par raport à ſes aſymptotes : où l'on remarquera que ſi l'on tiroit deux équations au cercle d'une équation du troiſiême ou du quatriême degré, le Problême ſeroit Plan, & l'équation ſe pourroit réduire à une équation du ſecond degré.

16. On peut encore conſtruire les Problêmes ſolides avec l'équation au cercle, & telle Section conique qu'on voudra, comme on peut voir dans le Traité de la Conſtruction des Equations de Mr. de la Hire, dont on a ſuivi ici la Méthode.

17. On multiplie les équations du troiſiême degré par leur inconnue, pour en tirer une équation à la Parabole, differente de celle que l'on forme arbitrairement pour introduire dans l'équation déterminée afin d'en tirer des équations indéterminées : mais cela n'y apporte aucun changement : car les Problêmes du troiſiême & du quatriême degré ſont de même nature; & même leurs conſtructions ne different qu'en ce que les deux Courbes qu'on y employe paſſent par l'origine de l'inconnue de l'équation, quand elle eſt du troiſiême degré, & qu'elles n'y paſſent pas quand elle eſt du quatriême.



SECTION XI.

Où l'on donne la Méthode de résoudre & de construire les Problêmes indéterminez dont les Equations excedent le second degré : ou ce qui est la même chose, de decrire les courbes dont ces Equations expriment la nature ; & de résoudre & de construire les Problêmes déterminez, dont les Equations excedent le quatriême degré.

MÉTHODE.

XXV. On a donné des régles dans la cinquiême, sixiême & septiême Section pour décrire les courbes du premier genre d'une maniere plus simple que celles qu'on tireroit naturellement de leurs équations : mais on n'en peut pas donner pour décrire celles des genres plus composez. Il faudroit pour cela les avoir examinées les unes après les autres ; ce qui iroit à l'infini : car chaque genre en contient un nombre d'autant plus grand qu'il est plus composé, & il y a une infinité de genres.

1. On dira seulement en general qu'après avoir trouvé une équation pour chaque Problême (en observant pour nommer les lignes inconnues, ce qui est prescrit dans la premiere ou septiême Observation de l'Art. 4.), qui exprime la nature de la Courbe qui doit servir à le résoudre, qui en détermine le genre, & qui soit réduite à son expression la plus simple ; il faut examiner par l'inspection des termes de l'équation, celle des deux inconnues dont on peut plus facilement trouver les valeurs en suivant les régles de la construction des équations déterminées, trouver par les mêmes régles les valeurs de

cette inconnue, en aſſignant à l'autre inconnue une valeur déterminée, & arbitraire; & l'on aura à chaque fois qu'on aſſignera à cette inconnue des valeurs arbitraires, autant de points de la courbe qu'on veut décrire, que l'autre inconnue aura de valeurs réelles, poſitives, & négatives. De ſorte que ſi l'inconnue la moins élevée de l'équation, ſi elles ne le ſont pas toutes deux également, a une ou deux dimenſions, on en trouvera les valeurs par les régles de la Section II, en aſſignant à l'autre inconnue des valeurs arbitraires, & la regardant enſuite comme déterminée. Si elle a trois ou quatre dimenſions, on en trouvera les valeurs par les régles de la Section précedente; & ſi elle a un plus grand nombre de dimenſions, on en trouvera les valeurs comme on expliquera dans la ſuite: mais comme l'on en pourra plus tirer l'équation au cercle, il ne ſera point neceſſaire d'en faire évanouir le ſecond terme, s'il s'y rencontre: où l'on remarquera qu'il faut réïtérer la conſtruction autant de fois qu'on aſſignera des valeurs differentes à l'inconnue que l'on prend pour conſtante.

2. On peut auſſi, après avoir trouvé une équation comme on vient de dire, abandonner la premiere & ſeptiême Obſervations de l'Art. 4, & nommer d'autres lignes par des lettres inconnues, & chercher par ce moyen d'autres équations, qui n'exprimeront pas effectivement la nature de la courbe qui doit réſoudre le Problême, & qui n'en détermineront pas le genre: mais qui pourront ſervir à décrire plus ſimplement la même courbe, ſoit par elles-mêmes, ou en faiſant évanouir par leur moyen les inconnues de la premiere équation, afin de la rendre plus ſimple, & d'en tirer plus facilement la maniere de décrire la même courbe.

3. On peut encore tirer de l'équation qui exprime la nature de la courbe qui doit réſoudre un Problême, des équations à quelqu'une des quatre courbes du premier genre, lorſqu'on y trouve l'expreſſion de l'appliquée de quelqu'une des quatre mêmes courbes, en égalant cette

expreſſion à une troiſiême lettre inconnue, ou à ſon quarré, & la conſtruction de ces équations facilitera la deſcription de la courbe qu'on veut décrire. Tout ceci ſe trouvera pratiqué dans les exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

Problême Indéterminé.

FIG. 105. 4. UN *demi cercle* AFB, *dont le diametre eſt* AB, *& le centre* C, *étant donné, ayant mené par un point quelconque* P *du diametre* AB, *la droite* PK *perpendiculaire à* AB, *qui rencontre la circonference* AFB *en* K. *Il faut trouver ſur* PK *le point* M. *qui la diviſe en ſorte que* AP . PM :: PB . PK. *Et comme il y a une infinité de points comme* M, *il faut trouver la courbe ſur laquelle ils ſe trouvent tous.*

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu; & nommé le diametre *AB*, a; & les indéterminées *AP*, x; *PM*, y; *PB* ſera, $a-x$; & par la proprieté du cercle *PK* ſera $\sqrt{ax-xx}$, & l'on aura par les qualitez du Problême, $AP\,(x) . PM\,(y) :: PB\,(a-x) . PK = \frac{ay-xy}{x} = \sqrt{ax-xx}$, & en quarrant chaque membre, multipliant enſuite par xx, & diviſant par $a-x$; l'on aura $x^3 = ayy - xyy$, qui eſt une équation du troiſiême degré, qui montre que la courbe cherchée dont elle exprime la nature eſt du ſecond genre. On tire de l'équation que l'on vient de trouver, $y = \pm \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$, ou $y = \pm \frac{xx}{\sqrt{ax-xx}}$, en multipliant les deux termes de la fraction par $\sqrt{x}$, ce qui ne change ni le degré de l'équation, ni le genre de la courbe, d'où l'on voit que la courbe paſſe des deux côtez de l'axe *AB* par les points *M*, & *m*, & que la partie *Am* eſt égale & ſemblable à la partie *AM*, puiſque *Pm* = *PM*.

Si

Si l'on fait $x = o$, le point *P* tombera en *A*, les termes où x se rencontrent seront nuls, & l'on aura par consequent $y = o$, d'où l'on connoît que la courbe rencontre son axe au point *A*, puisque *AP* & *PM* s'y aneantissent, & qu'elle ne rencontre qu'en *A* la parallele à *PK* menée par *A* : car si elle la rencontroit encore en quelqu'autre point, l'on trouveroit une valeur de y qui le determineroit.

Si l'on fait $y = o$, l'on aura aussi $x = o$, qui montre que la courbe ne rencontre son axe *AB* qu'au seul point *A*; & comme elle ne rencontre aussi la parallele à *PK*, menée par *A* qu'au seul point *A*; il suit qu'elle est toute du côté de *B* par raport à cette parallele.

Puisque par l'Hypothese *PB* . *PK* :: *AP* . *PM*, il est clair que la courbe *AM* touche son axe au point *A* : car le point *P* étant infiniment proche de *A*, les points *K* & *M* en seront aussi infiniment proches; & parcequ'alors *PB* surpassera pour ainsi dire infiniment *PK*; *AP* surpassera aussi pour ainsi dire infiniment *PM*; d'où il suit que la petite partie *AM* de la courbe sera pour ainsi dire dans la direction de son axe *AB*, qu'elle touche & coupe par conséquent au point *A*.

L'on voit encore par la même équation que x croissant, y croît aussi, même en deux manieres : car le numérateur xx du membre fractionnaire croissant, le dénominateur $\sqrt{ax - xx}$ diminue.

Si l'on augmente x jusqu'à ce qu'elle devienne $= a$, le point *P* tombera en *B*, & l'équation deviendra $y = \frac{aa}{o}$, & comme ce raport $\frac{aa}{o}$, est plus grand que tout raport donné, c'est-à-dire, infiniment grand; il suit que si l'on mene par *B* une ligne *BH* parallele à *PM*, cette parallele ne rencontrera la courbe qu'à une distance infinie, ou, ce qui est la même chose, qu'elle lui sera asymptote. L'on voit aussi qu'on ne peut pas augmenter x en sorte qu'elle surpasse *AB* : car le dénominateur de la

fraction deviendroit une quantité imaginaire ; & par consequent aussi les valeurs de y : ce qui fait voir que la courbe ne passe point au-delà BH menée par B parallele à PK. Il suit de tout ce qu'on vient de dire que la courbe est toute renfermée entre les deux paralleles à PM, menées par A & par B.

Puisque BH est asymptote à la courbe AM, il suit qu'elle coupe la circonference du cercle en quelque point F, qu'il est aisé de déterminer : car faisant $PM = PK$, ou $y = \sqrt{ax - xx}$, & mettant cette valeur de y dans l'équation précedente, elle deviendra $ax - xx = xx$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}a$, qui fait voir que le point F divisera par le milieu le demi cercle AFB : ce que l'on peut aussi remarquer par l'Hypothese ; car le point P tombant en C, l'on aura $AC . CM :: CB . CK$; & partant $CM = CK = AC$.

La qualité du Problême fournit une maniere assez simple pour décrire la courbe : mais il faut examiner si l'on n'en peut pas tirer une plus simple de son équation $y = \frac{xx}{\sqrt{ax - xx}}$, en cherchant les valeurs de y dans toutes les positions du point P. On trouve que cette équation donne cette construction qui est presque la même que celle que fournit le Problême. Soit prise PM troisiême proportionnelle à PK & à AP, & le point M sera à la courbe cherchée.

DE'MONSTRATION.

PAR la construction, & par la proprieté du cercle $\sqrt{ax - xx}$ (PK). x (AP) :: x. y (PM), d'où l'on tire $y = \frac{xx}{\sqrt{ax - xx}}$. *C. Q. F. D.*

Quoique ces constructions soient assez simples, il est neanmoins à propos de voir si l'on n'en peut pas trouver une encore plus simple. Soit pour ce sujet menée par les points A & M la droite AMG qui rencontre la

circonference AKB en E, & l'aſymptote AH en G, & ayant mené ED parallele à PK, & nommé DB, z; AD ſera $a - z$, & les triangles ſemblables APM, ADE, donneront $AP\ (x) . PM\ (y) :: AD\ (a - z) . DE = \frac{ay - zy}{x}$. Mais par la proprieté du cercle $DE = \sqrt{az - zz}$ donc $az - zz = \frac{aayy - 2azyy + zzyy}{xx}$, ou $z = \frac{ayy - zyy}{xx}$, en diviſant chaque membre par $a - z$. L'on a auſſi l'équation du Problême $yy = \frac{x^3}{a - x}$; donc en mettant cette valeur de yy dans l'équation précedente, l'on aura $z = \frac{ax - zx}{a - x}$; d'où l'on tire $z = x$, ou $AP = DB$; donc $AM = EG$, qui donne cette conſtruction qui eſt la plus ſimple que l'on puiſſe trouver.

Soit menée du point A une ligne droite quelconque AG qui rencontrera la circonférence du demi cercle en E; & ayant pris ſur AG, $AM = EG$; le point M ſera à la courbe cherchée.

DÉMONSTRATION.

PUISQUE (Conſt.) $AP = DB$, AP étant x; DB ſera auſſi, x; AD, $a - x$; & l'on aura, à cauſe des triangles ſemblables APM, ADE, $AP\ (x) . PM\ (y) :: AD\ (a - x) . DE = \frac{ay - xy}{x} =$ (par la prop. du cercle) $\sqrt{ax - xx}$, d'où l'on tire l'équation du Problême. *C. Q. F. D.*

Dioclés Inventeur de cette courbe l'a nommée *Cyſſoïde.*

EXEMPLE II.

Problême indéterminé.

FIG. 106. 5. *UN angle droit* ABH, *& un point fixe* A *sur un de ses côtez, étant donnez de position sur un Plan, si l'on mene du point fixe* A *une ligne quelconque* AG, *qui rencontre le côté* BH *en* G, *& qu'on prenne* GM = GB, *il faut trouver une équation qui exprime la nature de la courbe sur laquelle se trouve le point* M, *& tous ceux que l'on trouvera de la même maniere.*

Ayant supposé le Problême résolu, on abbaissera du point *M* sur *AB* le perpendiculaire *MP*; & ayant nommé la donnée *AB*, a, & les indéterminées *AP*, x; *PM*, y; *PB* sera, $a - x$; & *AM*, $\sqrt{xx + yy}$, & les triangles semblables *APM*, *ABG* donneront *AP* (x). *PM* (y) :: *AB* (a). *BG* = $\frac{ay}{x}$ = (Hyp.) *GM*, & à cause des paralleles *PM*, *BG*, l'on aura x (*AP*). $a - x$ (*PB*) :: $\sqrt{xx + yy}$ (*AM*). $\frac{ay}{x}$ (*GM*, ou *GB*), d'où l'on tire $y = \pm \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, qui est une équation du troisiême degré : car on auroit pû la diviser par x avant que d'extraire la racine, & la courbe par conséquent est du second genre.

Il seroit inutile de chercher une construction plus simple que celle qui est renfermée dans l'énoncé du Problême : car il est impossible d'en trouver de plus simples. Voici celle que l'équation donne.

Soit prolongée *AB* en *D*, en sorte que *BD* = *AB*, & décrit un demi cercle *AKD* sur le diametre *AD*. Ayant mené par un point quelconque *P* la droite *PK* parallele à *BH*, qui rencontrera le demi cercle en *K*, on prendra sur *PK*, *PM* quatriême proportionnelle à *PK*, *AP*, & *PB*, & le point *M* sera la courbe cherchée.

DE'MONSTRATION.

PAR la conſtruction, & à cauſe du demi cercle, $\sqrt{2ax - xx}$ (PK). x (AP) :: $a - x$ (PB). y (PM), d'où l'on tire $y = \pm \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$. *C. Q. F. D.*

On voit par cette équation que la courbe paſſe des deux côtez de ſon axe AB, & que les parties qui ſont de part & d'autre ſont égales & ſemblables.

Si l'on fait $x = 0$, l'on aura auſſi $y = 0$, ce qui montre que la courbe paſſe au point A, qui eſt par conſequent le ſommet de ſon axe ; & la conſtruction précédente auſſi bien que l'énoncé du Problême, font connoître qu'elle coupe au point A ſon axe AB à angles droits: car ſi l'on ſuppoſe le point P infiniment proche de A, les points K & M en ſeront auſſi infiniment proches. Or puiſque (conſt.) $PK . AP :: PB . PM$, & que PM eſt pour ainſi dire nulle par raport à PB; AP ſera par conſéquent nulle par raport à PK ; & partant le point M eſt pour ainſi dire dans la perpendiculaire à AB menée par A.

Si l'on fait $y = 0$, l'on aura $x = a$; d'où il ſuit que la courbe rencontre encore ſon axe au point B, puiſque y y eſt nulle. Mais outre cela, je dis qu'elle le coupe en faiſant avec lui un angle de 45 degrez ; car ſi l'on ſuppoſe que le point P ſoit infiniment proche de B, le point K ſera infiniment proche du point H milieu de la circonference du cercle AKD; c'eſt pourquoi PK ſera égale à PA, & par conſequent $PB = PM$ à cauſe de l'Analogie précédente $PK . AP :: PB . PM$. Ainſi le petit triangle KPB ſera rectangle & iſoſcele, & partant l'angle PBM ſera demi droit.

La même équation $y = \pm \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, fait voir que $AP = x$ peut devenir plus grande que $AB = a$, ſans que les valeurs de y deviennent imaginaires, ce qui fait voir

que la courbe paſſe au-delà de BH par raport à A, de ſorte que la partie MB ſe continue vers I, & l'autre vers E. Mais parcequ'alors y devient negative de poſitive qu'elle étoit, l'équation deviendra $-y = \pm \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, ou $y = \pm \frac{xx - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Ainſi pour décrire les parties de la courbe qui ſont au-delà de BH par raport à A, ayant mené par un point quelconque p, la droite pk parallele à BH, l'on prendra pm quatriême proportionnelle à pk, pA; & pB, & le point m ſera à la courbe cherchée.

Si l'on augmente x (AP) juſqu'à ce qu'elle devienne $= AD = 2a$, l'équation deviendra $y = \pm \frac{2aa}{0}$, qui fait voir que DF menée par D parallele à BH, & prolongée de part & d'autre à l'infini, ne rencontrera jamais la courbe, & lui ſera par conſéquent aſymptote.

Si l'on veut déterminer le point E, où la courbe coupe la circonférence du demi cercle, il n'y a qu'à faire $pm = pk$, c'eſt-à-dire, $y = \sqrt{2ax - xx}$, & mettant cette valeur de y dans l'équation précedente, l'on en tirera $x = \frac{3}{2} a$, c'eſt-à-dire que le point E eſt vis-à-vis le milieu de BD; & que par conſequent l'arc ED, eſt de 60 degrez.

EXEMPLE III.

Problême Indéterminé.

FIG. 107. 6. U*NE ligne droite* GH *indéterminée de part & d'autre, & un point* D *hors de cette ligne, étant donnez de poſition ſur un Plan, ſi l'on ajuſte l'axe* AE *d'une courbe quelconque* FAM *ſur la ligne* GH, *& qu'on appliqué au point fixe* D *une regle* DMF, *indéfinie de part & d'autre du point* D, *qui en tournant faſſe mouvoir la courbe* FAM *en pouſſant de côté ou d'autre un point déterminé* C *de ſon axe, le long de la*

ligne GH, *les intersections* F *&* M *de la regle* DMF, *avec la courbe* FAM, *décriront par ce mouvement deux autres courbes, ou deux parties d'une courbe* KF *&* IM. *L'on propose de trouver des équations qui en expriment la nature.*

Ayant supposé le Problême résolu, l'on menera du point D la ligne DE perpendiculaire à GH, ou à l'axe de la courbe FAM, & du point d'intersection M les lignes MP, MQ paralleles à DE & à AE : & ayant nommé les données DE, a; AC, b; & les indéterminées EP, ou QM, x; EQ, ou PM, y; AP, z; CP sera, $z-b$; DQ, $a-y$; & les triangles semblables DQM, MPC donneront $a-y\,(DQ)\,.\,x\,(QM)::y\,(MP)\,.\,z-b\,(PC)$, d'où l'on tire cette équation.

$A.\ xy = az - yz - ab + by$, qui est une équation generale pour la courbe IM, telle que puisse être la courbe FAM.

Si l'on change les signes des termes de l'équation A, où y se rencontre, l'on aura $-xy = az + yz - ab - by$, ou

$B.\ xy = -az - yz + ab + by$, qui est une équation generale pour la courbe KF : car l'inconnue $PM = y$, de positive qu'elle étoit, devient negative FO, $EP = x$, devient EO, & $AP = z$ devient AO. Ce qu'on peut aisément prouver en cherchant une équation dans cette supposition : car CO étant à present, $b-z$; EC sera $x+z-b$; & les triangles semblables DEC, FOC donneront $a\,(DE)\,.\,x+z-b\,(EC)::y\,(FO)\,.\,b-z\,(CO)$, d'où l'on tire $xy = -az - yz + ab + by$, qui est l'équation B.

La nature de la courbe FAM étant donnée, l'on aura une équation qui exprimera la relation de ses coordonnées AP, ou AO (z) & PM, ou OF, (y), d'où l'on tirera une valeur de z que l'on substituera dans l'équation A, ou B; & l'équation qui en résultera exprimera la nature de la courbe IM, ou KF, & en déterminera le genre.

Soit par exemple la courbe *FAM* une Parabole du premier genre dont le parametre soit p, l'on aura (Art. 10.) $p \times AO$, ou $p \times AP = FO^2$, ou PM^2, ce qui est en termes algebriques $pz = yy$, d'où l'on tire $z = \frac{yy}{p}$, & mettant en la place de z dans les équations *A* & *B* sa valeur $\frac{yy}{p}$, l'on aura après avoir divisé par y

$$C.\ x = \frac{ay - yy}{p} + \frac{by - ab}{y}, \ \&$$

$$D.\ x = \frac{-ay - yy}{p} + \frac{by + ab}{y}.$$

L'équation *C* donne cette construction: Soit menée par un point quelconque *Q* pris sur *DE* la droite *QM* parallele à *GH*. Soit fait $p.\ DQ :: QE.\ \frac{DQ \times QE}{p}$; & $QE.\ DQ :: AC.\ \frac{DQ \times AC}{QE}$, & ayant fait $QM = \frac{DQ \times QE}{p} - \frac{DQ \times AC}{QE}$ le point *M* sera à la courbe cherchée *IM*.

Ayant prolongé *DE* du côté de *E* vers *S*, & mené par un point quelconque *R* pris sur *ES* la droite *RF* parallele à *GH*; l'équation *D* donnera $RF = \frac{DR \times CA}{OF} - \frac{DR \times OF}{p}$, & le point *F* sera à la courbe *KF*. Tout ceci est évident par la seule inspection des équations *C* & *D*.

Si l'on fait $y = a$, l'équation *C* deviendra $x = 0$, ce qui fait voir que la courbe *IM* passe par le point D; & si l'on fait $y = 0$, l'équation *C* donnera $x = -\frac{ab}{0} + \frac{0}{p} = -\frac{ab}{0}$, qui montre que *HG* prolongée à l'infini du côté de *G*, est asymptote à la courbe *IM*, & s'en approche de plus en plus à l'infini; & l'équation *D* donne $x = \frac{ab}{0} - \frac{0}{p} = \frac{ab}{0}$, qui montre que *HG* prolongée à l'infini du côté de *H*, est asymptote à la courbe *KF*.

L'on

L'on a construit ces équations en regardant y comme donnée, parce que si on l'avoit regardée comme inconnue, & x comme donnée, la construction auroit été plus composée, & auroit dépendu de la Geometrie solide : car l'équation auroit été du troisiême degré.

Mr Descartes a nommé * dans cette supposition, les courbes *IM* & *KF paraboloïdes*. * Geom. Liv. 3.

7. Si la courbe *FAM* devient un angle rectiligne dont le sommet soit en *A*, la raison de *AP* à *PM*, ou de *AO* à *OF* sera constante ; qu'elle soit donc comme b à c (si b exprime *AC*, c exprimera la parallele à *DE* menée de *C* jusqu'à une des droites *AM*, ou *AF*), & l'on aura $z . y :: b . c$; d'où l'on tire $z = \frac{by}{c}$: & mettant cette valeur de z dans les équations *A* & *B*, l'on aura les deux suivantes,

$cxy = aby - byy - abc + bcy$, &

$cxy = - aby - byy + abc + bcy$, qui sont deux équations à l'Hyperbole que l'on construira par les régles de l'Article 21, ou 22.

8. Mais en ce cas on peut avoir des équations bien plus simples en suivant les Observations de l'Art. 4. Soient menées du point fixe *D* les droites *DE* paralleles à *AM*, Fig. 108. qui rencontrera *GH* en *E* ; *DP* parallele à *AF*, qui rencontrera *GH* en *O* ; & des points d'interfection *M* & *F*, les droites *MQ* & *FP* paralleles à *GH*, qui rencontreront *DE* & *DP* en *Q* & en *P* ; & ayant nommé les données *DE*, a ; *AC*, b ; *DO*, c ; & les inconnues *AE*, ou *MQ*, x ; *AM* ou *EQ*, y ; *AO* ou *FP*, z ; *AF*, ou *OP*, u ; *CE* sera, $b + x$; *DQ*, $a - y$; *CO*, $z - b$; *DP*, $c + u$; & les triangles semblables *DEC*, *DQM* & *DOC*, *DPF* donneront, a (*DE*) . $b + x$ (*EC*) :: $a - y$ (*DQ*) x (*QM*), & c (*DO*) . $z - b$ (*OC*) :: $c + u$ (*DP*) . z (*PF*), d'où l'on tire ces deux équations $by + xy = ab$, & $zu - bu = bc$, qui sont à l'Hyperbole par raport à ses asymptotes, & que l'on construira par les régles de l'Article 22.

9. Si la courbe *FAM* est un cercle dont le centre soit Fig. 109.

C, l'on aura en nommant les lignes comme on les a nommées n°. 6. $2bz - zz = yy$, d'où l'on tire $z = b + \sqrt{bb - yy}$; & mettant cette valeur de z dans les deux équations générales, l'on en aura deux autres, dont l'on tirera les deux qui ſuivent.

$$E.\ x = \pm \frac{\overline{a - y} \times \sqrt{bb - yy}}{y}, \text{ \&}$$

$$F.\ x = \pm \frac{\overline{a + y} \times \sqrt{bb - yy}}{y},$$ qui ſont du quatriême degré; & par conſéquent les courbes IM, KF, dont elles expriment la nature, ſont du troiſiême genre.

Ces deux équations préſentent une conſtruction aſſez ſimple pour décrire par des points les deux courbes IM, & KF: mais les interſections M & F du cercle FAM avec la régle mobile DMF, en donnent une encore plus ſimple: car ayant mené du point D une ligne quelconque DC, qui coupe GH en C, ſi l'on fait CM & CF chacune égale à la donnée b; les points M & F ſeront aux deux courbes IM & KF.

DE'MONSTRATION.

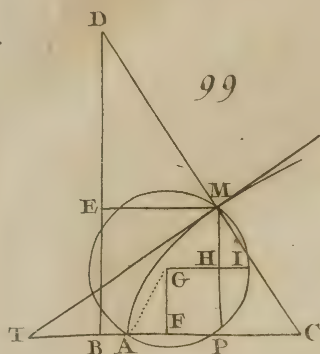
AYANT mené des points M & F les droites MP, MQ, FO & FR paralleles à DE & à GH, les triangles ſemblables, MPC, DQM, & FOC, DRF donnent,

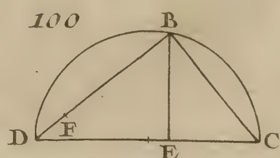
$y\,(MP).\sqrt{bb - yy}\,(PC) :: a - y\,(DQ).\,x\,(QM)$, &

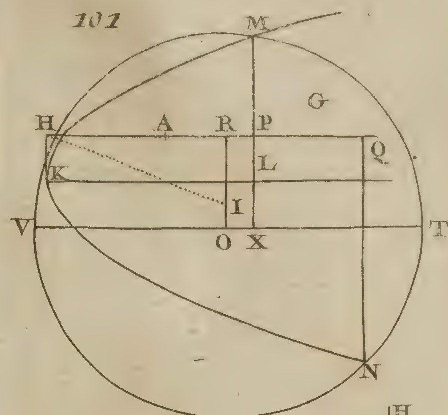
$y\,(FO).\sqrt{bb - yy}\,(OC) :: a + y\,(DR).\,x\,(RF)$, d'où l'on tire les équations E & F. C. Q. F. D.

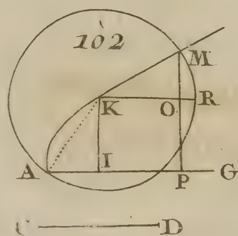
Les deux équations E & F font voir que les courbes IM & KF paſſent de l'autre côté de leur axe DE par raport à C, & que leurs parties qui ſont des deux côtez de DE, ſont égales & ſemblables.

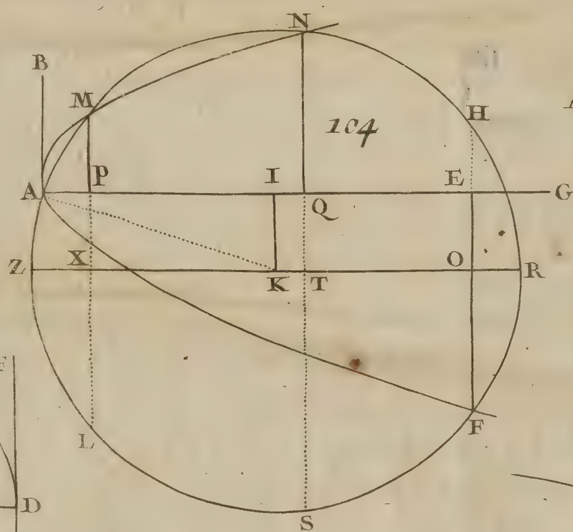
Si l'on fait $y = 0$, l'on aura $x = \pm \frac{ab}{0}$, d'où l'on voit que GH prolongée de part & d'autre à l'infini, eſt aſymptote aux deux courbes IM & KF.

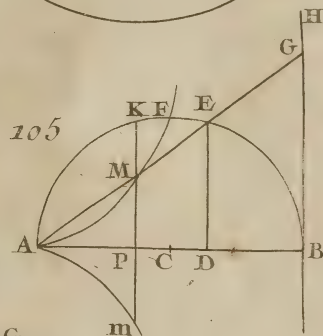

99
D
E
M
H
I
G
F
T
B
A
P
C

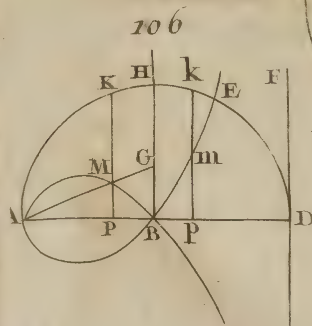

100
B
D
F
E
C

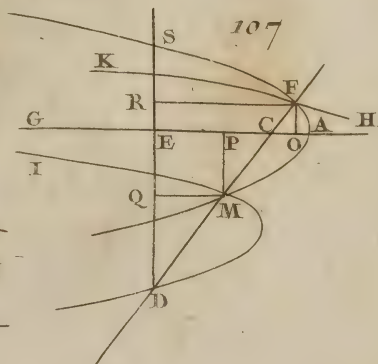

101
M
G
H
A
R
P
Q
L
K
I
V
O
X
T
N

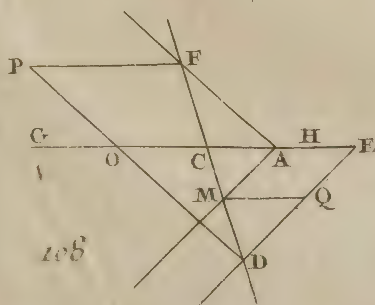

102
M
K
O
R
A
I
P
G
C
D

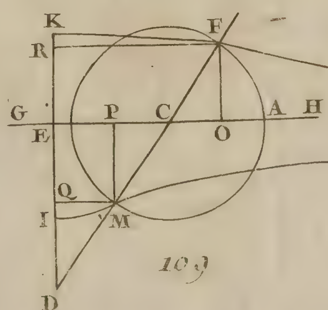

N
B
M
H
104
P
I
E
A
Q
G
Z
X
O
R
K
T
L
F
S

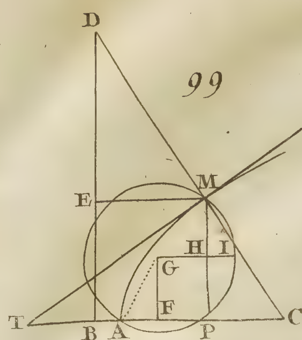

H
G
K
F
E
105
M
A
P
C
D
B
m

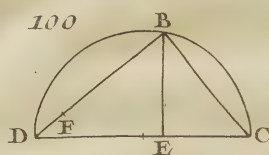

106
K
H
k
E
F
M
G
m
A
P
B
P
D

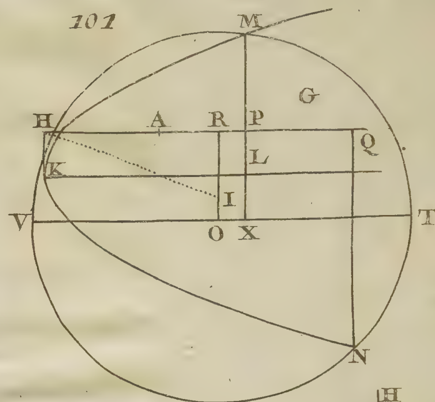

S
107
K
F
R
H
G
C
A
E
P
O
I
Q
M
D

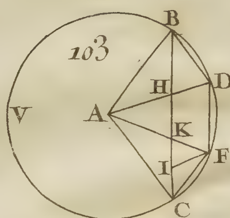

P
F
G
H
E
O
C
A
M
Q
108
D

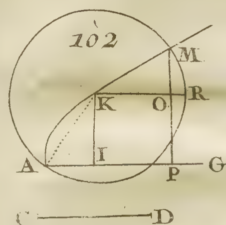

K
F
R
G
P
C
A
H
E
O
Q
I
M
109
D

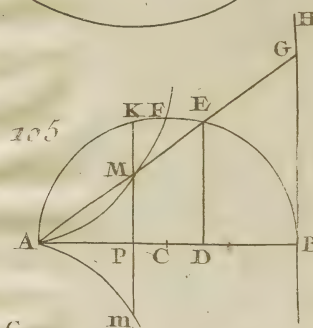

99
D
E
M
H
I
G
F
T
B
A
P
C

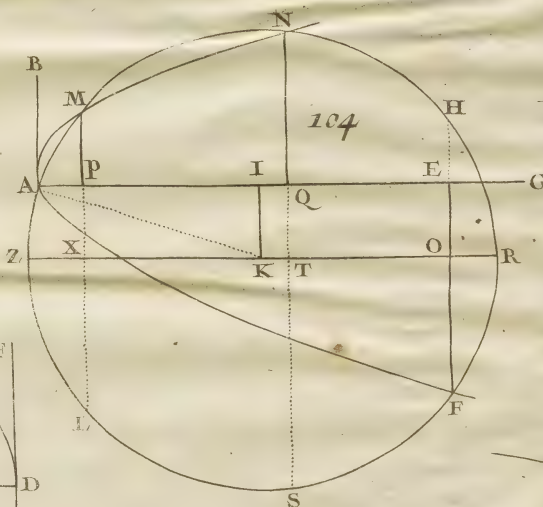

100
B
D
F
E
C

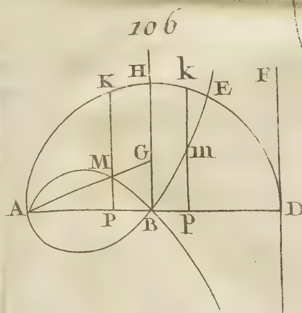

101
M
G
H
A
R
P
Q
L
K
I
V
O
X
T
N

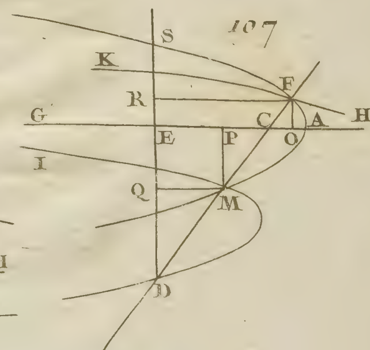

103
B
D
H
V
A
K
F
I
C

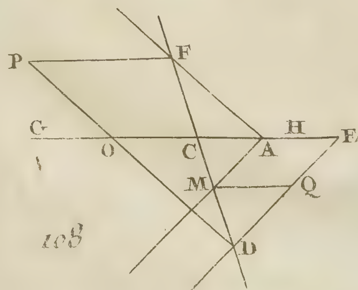

102
M
K
O
R
I
A
P
G
C
D

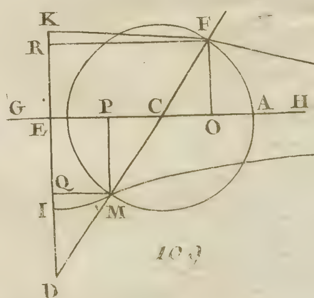

H
G
K
F
E
105
M
A
P
C
D
B
m


N
B
M
H
104
A
P
I
E
G
Q
Z
X
O
R
K
T
F
S


106
K
H
k
E
F
M
G
m
A
P
B
P
D


S
107
K
F
R
G
C
A
H
E
P
O
I
Q
M
D


P
F
G
H
E
O
C
A
M
Q
108
D


K
F
R
G
P
C
A
H
E
O
Q
I
M
109
D

Si l'on fait $x = o$, l'équation E se changera en ces deux suivantes $yy - 2ay + aa = o$, & $bb - yy = o$, d'où l'on tire $y = a$, & $y = \pm b$; il suit de la seconde $y = \pm b$, que les deux courbes IM & KF coupent l'axe DE en deux points I & K, qui sont éloignez du point E de la grandeur du demi diametre CM. Il suit de la premiere $y = a$, que la courbe IM peut passer par le point fixe D, ce qui arrive lorsque $b = a$, & lorsque b surpasse a avec cette difference, que lorsque $b = a$, elle coupe l'axe DE au seul point D; & lorsque b surpasse a, elle le coupe au point D, & en un autre point plus éloigné de E que le point D, de sorte qu'elle fait en ce cas une espece de nœud, & est semblable à la courbe du Problême précédent. L'on auroit connu la même chose par le moyen de l'équation F.

Nicomede auteur de cette courbe l'a nommée *Concoïde*, & le point D, le pole de la Concoïde.

EXEMPLE IV.

Problême Indéterminé.

10. UN *angle droit* ABH, *& un point fixe* A, *sur un de ses côtez* AB *étant donnez, il faut trouver dans cet angle le point* M, *en sorte qu'ayant mené du point* A *par* M, *la ligne* AMG *qui rencontre l'autre côté* BH *en* G, *& du même point* M, *la ligne* MP *parallele à* BH, MG *soit égale* à AP. FIG. 110.

Ayant supposé le Problême résolu, & nommé la donnée AB, a; & les inconnues AP, ou (Hyp.) MG, x; PM, y; BP sera, $a - x$; AM $\sqrt{xx + yy}$; & l'on aura à cause des paralleles BG, PM, x (AP). $\sqrt{xx+yy}$ (AM) :: $a - x$ (PB). x (MG), d'où l'on tire après les réductions ordinaires, $y = \pm \frac{x\sqrt{2ax - aa}}{a - x}$, qui est une équation du quatriême degré; & par conséquent la cour-

be dont elle exprime la nature, eſt du troiſiême genre.

On voit par cette équation que la courbe a deux parties égales & ſemblables, l'une d'un côté de ſon axe *AB*, & l'autre de l'autre.

Si l'on fait $y = 0$, l'on aura $x = \frac{1}{2}a$, d'où il ſuit que la courbe coupe *AB* par le milieu en *C*, & qu'elle ne la rencontre en aucun autre point; puiſqu'on ne trouve qu'une ſeule valeur pour x.

Si l'on fait $x = 0$, l'on aura $y = \frac{0}{a}$ qui pourroit faire penſer que la courbe paſſe auſſi au point *A*, puiſque y y devient nulle : mais on en eſt deſabuſé, lorſqu'on fait x moindre qu'un $\frac{1}{2}a$, ou négative : car alors les valeurs de y deviennent imaginaires; c'eſt pourquoi la courbe ne rencontre *AB* qu'au ſeul point *C*.

Si l'on fait $x = a$ l'on aura $y = \pm \frac{aa}{0}$, ce qui fait voir que la ligne *BH* prolongée de part & d'autre à l'infini, eſt aſymptote à la courbe.

Si l'on ſuppoſe que x ſurpaſſe a, ce qui eſt poſſible; le dénominateur $a - x$ du membre fractionnaire de l'équation, deviendra une quantité négative; c'eſt pourquoi les valeurs poſitives de y deviendront négatives, & les négatives deviendront poſitives; mais pour les laiſſer dans l'état où elles ſont, il n'y a qu'à changer les ſignes du dénominateur $a - x$, & l'on aura $y = \pm \frac{x\sqrt{2ax - aa}}{x - a}$, d'où l'on voit que la courbe a encore deux parties qui ſont au-delà de l'aſymptote *BH*, dans les deux angles *HBD*, *IBD* faits par le prolongement *BD* de l'axe *AB*, & par la ligne *HBI*; que ces deux parties ont encore pour aſymptote la ligne *HBI* : car ſi l'on fait dans la derniere équation $x = a$, l'on aura $y = \pm \frac{aa}{0}$, & que ces deux mêmes parties ne rencontrent point la ligne *BD* prolongée : car rien n'empêche d'augmenter x à l'infini, ſans que les racines de y deviennent nulles où imaginaires, ce qu'on a déja remarqué en faiſant $y = 0$. Les deux équations préceden-

tes $y = \frac{x\sqrt{2ax - aa}}{a - x}$, & $y = \frac{x\sqrt{2ax - aa}}{x - a}$ fourniſſent cette conſtruction. Soit $2ax - aa = zz$, qui eſt une équation à la Parabole, qui étant conſtruite ſuivant les régles de l'Art. 19, aura pour ſommet le point C, & pour axe la ligne CD. Ayant mené d'un point quelconque P pris ſur CD, une ligne PK parallele à BH, qui rencontrera la Parabole en K, ſoit priſe PM quatriême proportionnelle à BP, PA, & PK, & le point M ſera à la courbe cherchée.

DE'MONSTRATION.

ELLE eſt claire par l'équation précedente.

Cette conſtruction, & l'équation à la courbe, font voir que les deux parties de la courbe qui ſont dans les angles HBD, IBD ne rencontrent point la Parabole CK : car lorſque le point P ſe trouve au-delà de B par raport à A, BP eſt toujours moindre que PA ; & par conſéquent PK moindre que PM. On voit la même choſe par l'équation : car ſi l'on fait l'appliquée PK de la Parabole égale à l'appliquée PM de la courbe, c'eſt-à-dire $\sqrt{2ax - aa} = y$, en mettant cette valeur de y dans l'équation à la courbe, l'on en tirera $x = \frac{1}{2} a$, qui marque que ces deux appliquées ne peuvent être égales qu'en un ſeul point C, ou elles ſont nulles, ou $= 0$, & que par conſequent la courbe ne rencontre la Parabole qu'au ſeul point C.

On voit auſſi de ce que $PB . PA :: PK . PM$ que plus le point P s'éloigne de B, allant vers D, plus les points K & M s'approchent l'un de l'autre ; de ſorte que ſi l'on ſuppoſe le point P infiniment éloigné de B, PB ſera pour ainſi dire égale à PA ; & partant auſſi $PK = PM$, d'où il ſuit que la Parabole CK, & la courbe CMM, ſont aſymptotes l'une à l'autre.

EXEMPLE V.

Problême Indéterminé.

11. *DÉCRIRE la Courbe dont la nature est exprimée par l'équation suivante, qui est du quatrième degré, & où les deux inconnues* x *&* y*, sont élevées au-dessus du second* $x^4 - ayxx + byyx + cy^3 = 0$.

En assignant à y une valeur arbitraire, on regardera cette équation comme une équation déterminée du quatriême degré, & formant, selon les regles de la Section précedente, une équation à la Parabole, par exemple $az = xx$; & mettant dans l'équation précedente pour xx sa valeur az, l'on aura $aazz - aayz + byyx + cy^3 = 0$, ou $zz - yz \frac{+ byyx + cy^3}{aa} = 0$, qui est une autre équation à la Parabole; l'on combinera ces deux équations à la Parabole pour avoir une équation au cercle; on constituera cette équation au cercle avec la premiere équation à la Parabole, qui est la plus simple, & les points d'intersection détermineront les valeurs de x correspondantes à celles que l'on aura assignées à y, que l'on prend pour l'axe de la courbe qu'on veut décrire, & ayant appliqué ces valeurs de x, à l'endroit de l'axe où se termine la valeur assignée à y, l'on aura autant de points de la courbe cherchée que l'on aura trouvé de valeurs pour x positives & négatives; & de cette maniere, en assignant successivement differentes valeurs à y, l'on aura differens points de la même courbe. Où l'on remarquera que l'équation à la Parabole $az = xx$, ne renfermant point l'indéterminée y, la même Parabole servira toujours dans tous les changemens de valeurs que l'on assignera à y. Il n'y aura donc que le cercle dont la grandeur variera selon que l'on augmentera, ou que l'on diminuera la valeur de y.

L'on s'eſt déterminé à prendre y pour donnée, quoique ſes dimenſions ſoient moindres que celles de x, parceque y a un ſecond terme dans l'équation, & x n'en a point, outre que la conſtruction eſt la même, ſoit que l'inconnue ait quatre dimenſions, ou qu'elle n'en ait que trois.

Si les deux inconnues x & y avoient eu chacune un ſecond terme, l'on auroit pris indifferemment l'une ou l'autre pour conſtante, & l'on auroit fait évanouir le ſecond terme de celle que l'on auroit priſe pour inconnue, afin de faire toujours ſervir le cercle dans la conſtruction.

Si l'une des deux inconnues étoit élevée au-deſſus du quatriême degré, on décriroit encore la courbe par le moyen de la Parabole & du cercle, ſi l'autre inconnue étoit du troiſiême ou du quatriême : mais on la décriroit par le moyen du cercle ſeul, ſelon les regles de la Section ſeconde, ſi elle n'avoit qu'une ou deux dimenſions, en prenant dans l'un & l'autre cas celle qui excéde le quatriême degré pour conſtante.

Si dans une équation indéterminée, les deux inconnues excédent le quatriéme degré, le cercle ne pourra plus ſervir pour décrire la courbe; il faudra alors former une équation à la premiere Parabole cubique, par le moyen d'une nouvelle inconnue, & de celle de l'équation dont on veut trouver les valeurs, c'eſt-à-dire, de celle que l'on ne prend point pour conſtante.

On ſubſtituera dans l'équation propoſée, en la place des troiſiême, ſixiême, neuviême, *&c.* puiſſances de l'inconnue que l'on ne prend point pour conſtante, leurs valeurs tirées de l'équation à la Parabole cubique; ce qui donnera une équation à une courbe qui ſervira avec l'équation à la Parabole cubique, à décrire la courbe dont l'équation propoſée exprime la nature, comme on va voir par l'exemple qui ſuit.

EXEMPLE VI.

Problême Indéterminé.

12. DÉCRIRE *la courbe dont la nature eſt exprimée par l'équation ſuivante, qui eſt du ſixième degré, & où les inconnues* x *&* y *ſont toutes deux élevées au-deſſus du quatrième.*

$x^6 + ayx^4 - byyx^3 + bcy^3x + y^5 = 0$,

En prenant y pour conſtante, & la ligne qu'elle exprime pour l'axe de la courbe qu'on veut décrire, l'on fera $aaz = x^3$; donc $a^4zz = x^6$, & ſubſtituant dans l'équation propoſée en la place de x^6, & de x^3 leurs valeurs a^4zz, & aaz, l'on aura celle qui ſuit,

$a^4zz + a^3zyx - aabzyy + bcy^3x + y^6 = 0$, qui eſt une équation où l'inconnue x, n'a qu'une dimenſion; & que l'on conſtruira par conſéquent par les régles de la Section ſeconde, & les interſections avec la Parabole cubique, que l'on décrira auſſi par les mêmes régles puiſque l'inconnue z, n'a auſſi qu'une dimenſion, donneront des valeurs de x correſpondantes à celles que l'on aura aſſignées à y. Il en eſt ainſi des autres équations plus compoſées.

Mais au reſte de quelque genre que puiſſe être une courbe, il eſt rare que l'on ne puiſſe pas trouver une maniere de la décrire, plus ſimple que celle qu'on tire de ſon équation, en ſuivant les régles preſcrites n°. 2. & 3. ou autrement.

COROLLAIRE.

13. IL eſt clair qu'on peut conſtruire les équations déterminées où l'inconnue eſt élevée au-deſſus du quatriême degré comme on vient de dire, en formant une équation à la Parabole cubique avec une nouvelle inconnue, & celle de l'équation: car après les ſubſtitutions l'on pourra toujours avoir une équation à une courbe où l'inconnue de l'équation propoſée n'excédera pas le ſecond degré; & la courbe dont cette équation exprime la nature, & la

Parabole

Parabole cubique étant décrites, leurs interſections détermineront les valeurs ou racines de l'inconnue de l'équation propoſée. Il eſt pourtant certain qu'un Problême de cette nature ſera toujours conſtruit plus élégamment, lorſqu'ayant employé deux inconnues pour le réſoudre, on le conſtruira avec les deux premieres équations dans leſquelles on ſera tombé à la maniere de ceux de la Section neuviême, comme on va voir par l'exemple qui ſuit.

EXEMPLE

De la conſtruction des Problêmes dont les équations déterminées excédent le quatriême degré.

Problême.

14. U*N angle droit* ABH, *& un point fixe* A *ſur un de ſes côtez, étant donnez; il faut trouver au-dedans un point* M, *d'où ayant abbaiſſé ſur* AB *la perpendiculaire* MP, *le rectangle* AP × PM, *ſoit égal à* AB; *& qu'ayant mené du point* A *par le même point* M *la droite* AMC *qui rencontre* BH *en* C, AM *ſoit égale à* BC. FIG. III.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé la donnée AB, a; & les inconnues AP, x; PM, y; AM ſera $\sqrt{xx+yy}$; & l'on aura par la premiere condition du Problême $xy = aa$, qui eſt une équation à l'Hyperbole par raport à ſes aſymptotes.

A cauſe des triangles ſemblables APM, ABC, l'on a, $AP\,(x) \,.\, PM\,(y) :: AB\,(a) \,.\, BC = \frac{ay}{x} =$ (Hyp.) $\sqrt{xx+yy} = AM$, ou en quarrant les deux membres, & multipliant par xx, $aayy = x^4 + xxyy$, qui eſt une équation à une courbe du troiſiême genre, d'où faiſant évanouir y par le moyen de l'équation à l'Hyperbole $xy = aa$, l'on aura $a^6 = x^6 + a^4xx$, qui eſt une équation déterminée du ſixiéme degré.

Pour la conſtruire par le moyen de l'équation déterminée $a^6 = x^6 + a^4xx$, ſoit fait $aaz = x^3$, qui eſt une équation à la premiere Parabole cubique; & mettant dans l'é-

quation $a^6 = x^6 + a^4 xx$, en la place de x^3 sa valeur aaz, elle deviendra $aa = zz + xx$, qui eſt une équation au cercle.

FIG. 112. Soit préſentement F l'origine des inconnues des deux équations au cercle, & à la Parabole cubique, z qui va vers G, & x qui lui eſt perpendiculaire, & va en haut. Si du point F pour centre & pour rayon $AB = a$, l'on décrit un cercle; & ſur la même FG pour axe, dont le ſommet eſt F, & le parametre a, la Parabole cubique KFN; elle coupera le cercle en deux points K & N, & la perpendiculaire NQ ſera la valeur poſitive de x, & KL ſa valeur négative qui ſera égale à la poſitive, de ſorte

FIG. 111. 112. qu'ayant fait $AP = NQ$, le point P ſera un des points cherchez.

DÉMONSTRATION.

PAR la proprieté de la Parabole cubique (Art. 9. nº. 18.) $FQ \times aa = QN^3$, ou en termes algebriques $aaz = x^3$, qui montre que cette Parabole, n'eſt pas ſemblable à la Parabole ordinaire, & que ſes deux parties vont l'une d'un côté, & l'autre de l'autre de l'axe FG d'un ſens contraire : car l'on tire de ſon équation $x = \sqrt[3]{aaz}$, qui fait voir que x, n'a qu'une ſeule valeur qui eſt poſitive : mais ſi l'on fait z négative, l'on aura $x^3 = -aaz$, où x n'a qu'une ſeule valeur qui eſt négative. Maintenant par la proprieté du cercle, l'on a $FI^2 - FQ^2 = QN^2$, ou en termes algebriques $aa - zz = xx$, ou $a^6 - x^6 = a^4 xx$, qui eſt l'équation que l'on a conſtruite. *C. Q. F. D.*

Mais pour réſoudre entierement le Problême, il faut encore déterminer la grandeur de $PM = y$; c'eſt pourquoi reprenant l'équation à l'Hyperbole $xy = aa$, qui eſt la plus ſimple des deux premieres qu'on a trouvées, l'on en tirera $y = \frac{aa}{x}$, qui eſt une équation déterminée du premier degré à cauſe de x dont la valeur vient d'être trouvée; c'eſt pourquoi ſi l'on prend PM troiſiême proportionnelle à AP & à AB, le point M ſera celui que l'on cherche.

On pourra aussi construire cette équation $a^6 = x^6 + a^4xx$ par le moyen du cercle & de la Parabole ordinaire : car ayant fait $as = xx$, l'équation déterminée deviendra $a^3 = s^3 + aas$, en mettant pour xx sa valeur as, qui est une équation du troisiême degré, que l'on construira par les régles de la Section neuviême ; & après avoir trouvé par ce moyen la valeur de s, l'on aura celle de $x = AP$ qui est une moyenne proportionnelle entre a & s : cela fait, il faudra encore déterminer la grandeur de $PM = y$ comme on vient de faire.

Pour construire présentement le Problême avec les deux premieres équations $xy = aa$, & $aayy = x^4 + xxyy$; l'origine des inconnues x & y, dans l'une & dans l'autre, étant au point A, x allant vers B, & y parallele à BH ; ayant fait $BH = AB = a$, & mené AS parallele à BH, l'on décrira par H entre les asymptotes AB, AS l'Hyperbole HM. FIG. III.

L'énoncé du Problême donne une description très-simple de la courbe AM dont l'équation $aayy = x^4 + xxyy$ exprime la nature, & cette courbe coupera l'Hyperbole HM au point cherché M. La Démonstration en est claire, & l'on voit que cette construction résout pleinement, naturellement, & très-élegamment le Problême.

On pourroit regarder ce Problême, comme un Problême solide, puisqu'on l'a construit avec le cercle, & la Parabole ordinaire : mais on a jugé à propos de le faire servir d'exemple pour la construction des Problêmes dont les équations excédent le quatriême degré.

Si on examine la nature de la courbe AM par le moyen de son équation, l'on en tirera une description assez simple ; & l'on trouvera qu'elle touche son axe AB au point A, & qu'elle a pour asymptote la droite BH, &c.

REMARQUES GENERALES
Sur la construction des Problêmes déterminez & indéterminez.

15. LES Problêmes déterminez tels qu'ils puissent être, ont toujours autant de solutions que les deux lignes, droi-

tes ou courbes, qui ſervent à les réſoudre, ont de points communs ou d'interſections; & ſi ces deux lignes ne ſe rencontrent point, le Problême ſera impoſſible.

On pourroit auſſi ſe ſervir de l'équation à l'Hyperbole $xy = aa$, au lieu de l'équation à la Parabole $ay = xx$, pour tirer des équations indéterminées des équations déterminées, du troiſiême & du quatriême degré, & de l'équation à l'Hyperbole cubique $xxy = a^3$, au lieu de l'équation à la Parabole cubique $aay = x^3$, pour conſtruire les Problêmes déterminez dont les équations excédent le quatriême degré. Enfin les Problêmes déterminez conſtruits de la maniere que nous avons propoſée, ſeront toujours conſtruits avec les courbes les plus ſimples qu'ils le puiſſent être.

16. Pour décrire les courbes du premier genre, on a réduit leurs équations à un certain état : on n'a point fait la même choſe pour décrire celles des genres plus compoſez, parcequ'il y en a une trop grande quantité dans chaque genre. Il peut neanmoins arriver qu'en changeant l'origine, ou la poſition de leurs axes, ou ce qui revient au même, de leurs coordonnées, les équations en deviendront plus ſimples; & par conſéquent auſſi leur conſtruction. Or ces changemens ſe font de la même maniere que ceux qui ſe font par les réductions, comme on a vû dans toute l'étendue de la Section huitiême, en égalant une de leurs inconnues + ou — une quantité connue à une nouvelle inconnue, & ſubſtituant dans l'équation la valeur de l'inconnue que l'on en veut faire évanouir, ce qui donnera une équation dont la forme ſera differente de la premiere. On peut faire la même choſe ſur l'autre inconnue.

On peut encore non-ſeulement changer l'origine des coordonnées : mais on peut auſſi changer l'angle qu'elles font entr'elles, & leur faire faire tel angle qu'on voudra, comme l'on a fait en pluſieurs endroits de la même Section huitiême.

SECTION XII.

Des Courbes méchaniques, ou tranſcendentes, de leur deſcription, & des Problêmes qu'on peut conſtruire par leur moyen.

XXVI. TOUTES les Courbes geométriques rentrent en elles-mêmes, ou s'étendent à l'infini ; de maniere que leurs axes, ou leurs coordonnées les rencontrent en un nombre déterminé de points, ce qui fait que les lettres indéterminées des équations qui en expriment la nature, ou, ce qui eſt la même choſe, qui expriment la relation que leurs coordonnées ont entr'elles, ont un nombre déterminé de dimenſions, & qu'on peut par conſéquent trouver tous les points de ces Courbes geométriquement, c'eſt-à-dire, par l'interſection de deux lignes geométriques droites, ou courbes.

Toutes les Courbes méchaniques rentrent auſſi en elles-mêmes, ou s'étendent à l'infini : mais on ne peut point trouver d'équations qui expriment geométriquement la relation de leurs coordonnées : car il y a des Courbes méchaniques dont une des coordonnées eſt une ligne droite, & l'autre une ligne courbe dont la rectification eſt geométriquement impoſſible. Il y en a d'autres dont les coordonnées ſont deux lignes courbes ; d'autres dont les appliquées partent toutes d'un même point, & d'autres qui ſont figurées de maniere que leurs axes les rencontrent en une infinité de points ; d'où il ſuit qu'afin qu'une équation en pût exprimer la nature ; il faudroit qu'au moins une de ſes inconnues eût une infinité de dimenſions, ce qui eſt impoſſible ; & c'eſt pour cela que ces Courbes ſont auſſi nommées tranſcendentes.

Il ſuit de tout ceci que l'on ne peut geométriquement trouver tous les points des Courbes méchaniques, puiſque leurs équations n'en expriment que méchaniquement la nature.

Il y a même des Courbes méchaniques dont on ne connoît que certaines proprietez, d'où l'on ne peut tirer d'équations en termes finis. Il faut alors avoir recours à l'infini, en regardant les Courbes comme des Polygones d'une infinité de côtez, & en comparant les côtez d'un triangle infiniment petit, formé par une petite portion de la Courbe comprise entre deux appliquées infiniment proches, par la difference de ces deux appliquées; & par la distance de l'une à l'autre, & que l'on regarde comme un triangle rectiligne, aux côtez d'un grand triangle formé par la tangente, ou la perpendiculaire, par l'appliquée, & par la soûtangente, ou par la soûperpendiculaire, & les équations que l'on tire de la comparaison des côtez de ces deux triangles, sont nommées *équations différentielles*; parce que les côtez du petit triangle sont les différences de la Courbe, des deux appliquées infiniment proches, & des deux abscisses qui correspondent à ces deux appliquées.

On n'entreprend point ici de donner une Theorie complete des Courbes méchaniques; mais plutôt une simple explication de celles qui se rencontrent le plus ordinairement dans les Ouvrages des Geometres, & particulierement dans l'excellent Livre de l'Analyse des Infiniment Petits de feu *Monsieur le Marquis de l'Hôpital*, où il suppose que son Lecteur connoisse toutes les Courbes dont il explique les plus belles proprietez.

PROPOSITION I.

FIG. 113. 1. SOIT un cercle *ABP*, dont le centre est *C*, & un rayon *CA*. Si l'on conçoit que le rayon *CA* fasse un tour entier autour de son extrêmité immobile *C*, de maniere que le point *A* se meuve uniformement sur la circonférence de *A* par *B* en *A*, pendant qu'un point mobile parcourera aussi d'un mouvement uniforme, le rayon *CA* allant de *C* en *A*; ce point décrira par la composition de ces deux mouvemens, une Courbe *CDMA*, qui aura cette proprieté dans toutes les situations de *AC*, par

exemple en celle de *CP*, que la circonference entiere *ABA* ſera à ſa partie *ABP*: comme *CA* ou *CP* à *CM*, ou (ayant nommé *CA*, a; *ABA*, c; *ABP*, x; *CM*, y;) $c . x :: a . y$, d'où l'on tire $ax = cy$.

Si l'on ſuppoſe que le rayon *CA* faſſe encore un, ou pluſieurs tours, le point décrivant parcourera pendant chaque tour, ſur *CA* prolongée, des parties comme *AE* égales à *CA*, & la courbe fera autant de tours autour d'elle-même, que *CA* en aura fait; & comme on peut ſuppoſer que le rayon *CA* faſſe une infinité de tours; il ſuit que la Courbe peut le rencontrer en une infinité de points; & que par conſéquent elle eſt méchanique, ou tranſcendente.

Archimede Auteur de cette Courbe l'a nommée *Spirale*.

Pour la décrire, ayant diviſé la circonférence *ABA*, & le demi diametre *CA* en un nombre égal de parties égales, & mené *CP* à quelqu'une des diviſions, on portera de *C* en *M* autant de parties de *CA*, que *ABP* en contient, ou de *P* en *M*, autant de parties de *CA* que *AFP* en contient; & de l'une ou de l'autre maniere le point *M* ſera à la Courbe *CDM*: car l'on aura toujours *ABA* . *ABP* :: *CA* . *CM*, ou *ABA* . *AFP* :: *CA* . *PM*.

On décrira de même le 2[e] tour, en portant ſur le prolongement de *CP* autant de parties de *CA* que *ABP* en contient, & ainſi des autres, en décrivant pour chaque tour un cercle dont le rayon ſoit double, triple, &c. du rayon *CA*.

Si l'on ſuppoſe que le rayon *CA*, & le point décrivant, ſe meuvent avec des viteſſes qui ſoient en telle raiſon qu'on voudra, c'eſt-à-dire, que ces viteſſes ſoient telles que l'on ait toujours $ABA^m . ABP^m :: CA^n . CP^n$, ou $c^m . x^m :: a^n . y^n$, d'où l'on tirera $a^n x^m = c^m y^n$, qui eſt une équation pour toutes les Spirales à l'infini.

Ce ſeroit la même choſe ſi le rayon *AC* tournoit autour du point *C* d'un ſens contraire, de *A* par *F* vers *P*, pendant que le point mobile deſcendroit de *A* vers *C*, en ſuppoſant les viteſſes telles qu'on les vient de ſuppoſer :

car nommant *AFP*, x; & *PM*, y; l'on auroit encore $c^m . x^m :: a^n . y^n$, ou $a^n x^m = c^m y^n$, qui est l'équation précédente.

Si m & n signifient des nombres positifs, les spirales seront nommées *paraboliques*; & si l'une des deux signifie un nombre négatif, elles seront nommées *hyperboliques*; parceque si c & x exprimoient des lignes droites aussi-bien que a & y, ces équations appartiendroient à la Parabole dans le premier cas, à l'Hyperbole dans le second. Par exemple, si $m = 1$, & $n = 2$, l'on aura $aax = cyy$. Si $m = 1$, & $n = -1$, l'on aura $xy = ac$. Si $m = 2$, & $n = -1$, l'on aura $xxy = acc$, &c. L'on décrira ces Courbes comme si elles étoient geométriques, en supposant la quadrature du cercle.

PROPOSITION II.

FIG. 114. 2. SOIT un quart du cercle *ADB*, dont le centre est *C*, & les rayons *CA* & *CB*. Si l'on conçoit que le rayon *CA* se meuve uniformement autour du centre *C*, jusqu'à ce qu'il arrive en *CB*, & que pendant ce temps-là une perpendiculaire *PM* au rayon *CA*, partant du point *A*, parcourre aussi uniformement le rayon *AC*, en demeurant parallele à *CB*; l'intersection *M* du rayon *CA* qui devient *CD*, & de la perpendiculaire *PM*, décrira une courbe *AME*, qui sera telle que *ADB* . *AD* :: *AC* . *AP*. *Dioclés*, son Auteur, l'a nommée *Quadratrice*.

FIG. 115. 3. Si le rayon *AC* au lieu de se mouvoir autour du centre *C*, se mouvoit parallele à lui-même, de sorte qu'étant parvenu dans une situation quelconque *DF*, l'on ait toujours *ADB* . *AD* :: *AC* . *AP*; l'intersection *M* de la parallele *DF* avec la perpendiculaire *PM*, décriroit la Courbe *AMB*, que *Monsieur Tchirnhausen* a aussi nommée *Quadratrice*.

FIG. 114. 115. Si l'on nomme *AC*, a; *ADB*, c; *AD*, x; *AP*, y; l'on aura $c . x :: a . y$; donc $ax = cy$, pour l'équation commune à ces deux courbes.

PROPOSITION

PROPOSITION III.

4. SOIENT deux cercles AFB, ALI égaux ou inégaux, qui se touchent en A, dont les centres soient C & H, & les rayons CA, ou CB & HA : soit de plus un point fixe D, pris sur le rayon CB prolongé, ou non prolongé. Fig. 116.

Si l'on suppose presentement que le cercle AFB roule sur le cercle ALI, jusqu'à ce que le point B soit parvenu en T, le point D décrira par ce mouvement une portion de Courbe DMS, que l'on appelle *demi Epicycloïde*, ou *demi Roulette*.

Pour trouver une équation qui renferme quelque proprieté de cette courbe, supposons que le demi cercle mobile AFB, soit parvenu en roulant dans la situation KLP dont le centre soit O, le point D sera alors en M, qui est un des points de la courbe, & le point B sera en P. Ayant décrit du centre C par D le demi cercle DGE, du centre H par M l'arc MG, qui rencontrera la demi circonférence DGE en G, l'on menera du centre H du cercle immobile ALI, les droites HM, qui coupera en I le cercle ALI, HLO qui passera par le point touchant L, & HG qui coupera l'arc ALI en R, & du centre C du demi cercle mobile AFB, la droite CG qui coupera AFB en F.

Il est clair que les triangles HCG, HOM sont égaux, & équiangles : car $HC = HO$, $HG = HM$, & $CG = OM$: c'est pourquoi les angles CHG, OHM seront égaux, & partant l'arc $RI =$ l'arc $AL =$ (Hyp.) l'arc $LK =$ (à cause de l'angle $HOM = HCG$) l'arc FB.

Nommant donc les données CB, ou CF, ou LO, &c. a; BD, ou MP, ou AE, b; HA, ou HI, &c, c; l'arc DG, x; l'arc MG, y; & l'appliquée HM, z; CD sera, $a+b$; & les secteurs semblables CDG, CBF, donneront

$$CD\,(a+b) . CB\,(a) :: DG\,(x) . BF = \frac{ax}{a+b} = RI;$$

& à cause des secteurs semblables HMG, HIR, l'on a

$z(HM) . c(HI) :: y(HG) . \frac{ax}{a+b}(IR)$, d'où l'on tire $cy = \frac{axz}{a+b}$, ou $acy + bcy = axz$.

COROLLAIRE I.

5. IL eſt clair que lorſque le point B, ou P touchera le cercle ALI en un point T, larc ALT ſera égal à la demi circonférence AFB, & le point décrivant D ou M ſera ſur le rayon HT en S, de ſorte que $ST = BD$.

COROLLAIRE II.

6. SI le point décrivant D étoit entre C & B, le cercle DGE ſeroit intérieur au cercle AFB, & lorſque le point B, ou P ſeroit parvenu en T, le point décrivant D, ou M, ou, ce qui eſt la même choſe, le point S de la Courbe ſeroit ſur le rayon HT prolongé au-delà de T de la longueur de BD, & l'équation précedente deviendroit $acy - bcy = axz$: car $BD = b$ deviendroit négative de poſitive qu'on l'a ſuppoſée.

COROLLAIRE III.

7. SI le point D étoit en B, ou ce qui eſt la même choſe, ſi B devenoit le point décrivant, le cercle DGE ſe confondroit avec le cercle AFB, & le point S de la Courbe tomberoit en T, ou le point B toucheroit le cercle ALI; & en ce cas $DB = b$ devenant nulle, ou $= 0$, l'équation deviendroit $cy = xz$.

COROLLAIRE. IV.

8. SI l'on ſuppoſe que le point H s'éloigne infiniment de A dans la ligne AB, le cercle ALI deviendra une ligne droite perpendiculaire ſur AB au point A; l'arc GM, une autre droite parallele à ALI; & les rayons AH & MH, deviendront infinis, & par conſéquent paralleles & égaux; c'eſt pourquoi c ſera égale à z, & l'équation

précedente (nº. 4.) se changera en celle-ci $ay + by = ax$, en la divisant par les quantitez égales c & z, & faisant de nouveau les mêmes raisonnemens que l'on vient de faire dans les trois premiers Corollaires, l'équation du second deviendra $ay - by = ax$; celle du troisiême deviendra $y = x$.

La Courbe *DMS*, est en ce cas nommée, *demi Cycloïde* ou *demi Roulette à Bâse droite*.

COROLLAIRE V.

9. SI le cercle *AFB* au lieu de rouler, glissoit sur la ligne *AL* droite, ou circulaire, en sorte que le point touchant *A* parcourût d'un mouvement uniforme la ligne $ALT = AFB$, pendant que le point décrivant *D* parcoureroit aussi d'un mouvement uniforme la demi circonférence $DGE >$, $<$, ou $= AFB$, & en lui demeurant concentrique; il est clair que la demi roulette décrite par ces mouvemens, seroit la même que si le cercle *AF* rouloit sur la ligne *ALT*.

COROLLAIRE VI.

10. MAIS si le point décrivant *D* employe plus de temps à parcourir uniformement la demi circonférence *DGE*, que le point touchant *A* n'en employe à parcourir aussi uniformement $ALT = AFB$, la demi roulette sera nommée *Alongée*.

Si au contraire le point *D* employe moins de temps à parcourir *DGE*, que le point *A* n'en employe à parcourir $ALT = AFB$; la demi roulette sera nommée *Accourcie*.

COROLLAIRE VII.

11. SI le point touchant *A*, & le point décrivant *D* se mouvoient avec des vitesses qui fussent telles que les puissances m des parties parcourues par le point *A* sur *AL*, & les puissances n des parties parcourues dans des temps égaux par le point *D* sur la demi circonférence $DEG >$,

<, ou = *AFB*, gardassent entr'elles un raport constant, l'on pourroit avoir par ces mouvemens non seulement toutes les roulettes dont on vient de parler : mais encore, une infinité d'autres de différens genres.

REMARQUE.

12. LEs Roulettes & bâses droites, sont toutes méchaniques : car une ligne droite se pouvant étendre à l'infini, le cercle mobile *AFB*, pourra faire une infinité de tours, ou glisser sur cette ligne infinie *AL* pendant que le point décrivant *D*, parcourera une infinité de fois la circonférence du cercle concentrique *DGE* : mais la roulette décrite par le point *D* rencontrera à chaque tour, ou la ligne *AL*, ou une autre qui lui sera parallele ; c'est pourquoi la ligne *AL* prolongée à l'infini, ou sa parallele, rencontrera en une infinité de points la Roulette *DMS* qui sera par conséquent méchanique.

Mais les Roulettes à bases circulaires, ne sont pas de même : car lorsque les diametres du cercle immobile *ALT*, & du mobile *ABF* seront entr'eux, comme nombre à nombre, leurs circonférences seront aussi comme nombre à nombre ; c'est pourquoi le point décrivant *D*, retombera au même point *S* après une ou plusieurs révolutions, & si le cercle mobile continue de rouler, ou de glisser après ce tour au point *S*, le point *D* recommencera à décrire la même Roulette & partant un rayon *HM* tiré du centre *H*, la rencontrera en un certain nombre déterminé de points ; alors la Roulette sera geométrique, & l'on pourra trouver une équation qui servira à en déterminer tous les points geométriquement, comme on pourra voir dans un livre que *Monsieur Nicole* va donner au public sur toutes les espéces de Roulettes, où il en expliquera très-sçavament toutes les proprietez.

Mais lorsque les diametres du cercle mobile, & du cercle immobile seront incommensurables, le point décrivant ne retombera jamais dans un même point ; & en

faisant une infinité de tours autour du cercle immobile, il décrira une infinité de Roulettes qui ne seront neanmoins qu'une même Courbe ; & partant un rayon tiré du centre du cercle immobile rencontrera cette Courbe en une infinité de points, & elle sera par conséquent méchanique.

PROPOSITION IV.

PROBLÊME.

13. *IL faut décrire la courbe* BM *dont l'axe est* AP, *une appliquée* PM, *& dont une des proprietez est que la soûtangente* PT *est toujours égale à une ligne donnée* KL.

Ayant supposé le Problême résolu, & mené l'appliquée *pm* infiniment proche de *PM* ; la ligne *MmT*, menée par les points *M*, *m* infiniment proches, sera une tangente : car la courbe *BM*, étant regardée comme un polygone d'une infinité de côtez, *Mm* sera un de ces côtez. Or il est clair que si la courbe *BM* est toujours convexe d'un même côté, le petit côté *Mm* étant prolongé, ne la coupera point, & le prolongement *MT* sera par conséquent une tangente. FIG. 117.

Ayant mené *mR* parallele à *AP*, *RM* sera la différence des deux appliquées infiniment proches *PM* & *pm* ; c'est pourquoi on lui donnera le même nom qu'à *PM*, précédé de la lettre *d*, qui signifiera *différence*, & l'on n'employera point dans la suite la lettre *d* à d'autres usages. Ainsi nommant l'appliquée *PM*, *y* ; *RM* sera *dy*, c'est-à-dire, différence de *y* ; de sorte que la lettre *d* ne fait que caractériser *y*, & n'est l'expression d'aucune quantité : mais parce qu'il n'y a aucun point fixe sur *AP*, pour pouvoir nommer l'intervalle qui se trouveroit entre ce point fixe, & le point *P* par une autre inconnue, *x* ; on se contentera de nommer *Pp*, ou *Rm*, *dx* ; on nommera aussi la donnée *KL*, ou (Hyp.) *PT*, *a* : or le petit triangle *MRm* étant regardé comme rectiligne à cause de l'infinie peti-

teſſe du petit côté *Mm*, ſera ſemblable au triangle *MPT*; c'eſt pourquoi l'on aura dy (*MR*). dx (*Rm*) :: y (*MP*). a (*PT*) d'où l'on tire $ydx = ady$, qui eſt une équation différentielle.

14. Pour conſtruire les courbes qui ont de telles équations, il faut 1°. Que l'une des différences avec ſon inconnue, ſi elle s'y rencontre ſoit dans un des membres de l'équation, & l'autre dans l'autre, & que les deux différences ſoient dans le numérateur, ſi l'équation eſt fractionnaire; ſelon cette régle l'équation précédente devient $dx = \frac{ady}{y}$.

2°. Qu'en multipliant ou diviſant l'équation, s'il eſt néceſſaire, par une quantité conſtante, chaque membre ſoit un plan dont chaque différence ſoit un côté. Ainſi l'équation $dx = \frac{ady}{y}$ deviendra $adx = \frac{aady}{y}$, en multipliant chaque membre par a.

3°. On égalera chaque membre à une nouvelle inconnue, après l'avoir diviſé par la différence qu'il renferme, & l'on aura par ce moyen deux équations à deux courbes geométriques, ou une équation à la ligne droite & l'autre à une courbe. Ainſi de l'équation précédente, on tire $a = z$, qui eſt une équation à la ligne droite, & $\frac{aa}{y} = ſ$, ou $aa = yſ$, qui eſt une équation à l'Hyperbole par raport à ſes aſymptotes.

FIG. 118. 4°. Ayant mené deux lignes *DQ*, *FP* qui ſe coupent à angles droits en *A*; on ſuppoſera que les quatre inconnues qui ſe trouvent dans l'équation différentielle, & dans les deux équations que l'on en a tirées, ont leur origine commune au point d'interſection *A*, de maniere que les deux inconnues de chaque équation ſe trouvent ſur les deux lignes qui forment un même angle droit, c'eſt-à-dire, que ſi l'on nomme *AP*, x; & *AQ*, y; qui ſont les deux inconnues de l'équation différentielle précédente, il fau-

dra néceſſairement nommer *AF*, $ſ$; & *AD*, z; afin que les inconnues y & $ſ$ de l'équation à l'Hyperbole, forment un même angle droit *FAQ*, &c.

5°. On décrira par les régles des Sections 8, ou 11. les deux courbes geométriques, chacune dans l'angle, dont les côtez ſont exprimez par les inconnues de ſon équation. Ainſi dans cet Exemple, à cauſe de l'équation $aa = ſy$ l'on décrira une Hyperbole *NN* dans l'angle *FAQ*, dont les côtez *AQ*, *AF* ſont nommez y & $ſ$, & à cauſe de l'équation $z = a$; ayant fait $AD = a = z$, l'on menera *DS* parallele à *AP*.

Avant que de venir à la conſtruction des équations differentielles, l'on remarquera, 1°. Qu'elles n'appartiennent pas toutes à des courbes méchaniques; il y en a qui appartiennent à des courbes geométriques: mais l'art de les diſtinguer dépend du calcul inégal que nous ne pouvons pas expliquer ici. 2°. Que les inconnues dont les différences ſe trouvent dans une équation différentielle, expriment ou deux lignes droites, ou l'une exprime une ligne droite, & l'autre une ligne courbe, ce qui fait deux cas. La conſtruction de l'équation de ce Problême, & celle de l'équation du Problême qui ſuit, où toutes ces deux courbes ſont méchaniques, ſerviront d'Exemples pour l'un & pour l'autre cas.

15. Pour conſtruire l'équation $adx = \frac{aady}{y}$, l'on prendra ſur $AQ = y$ un point quelconque *B*, & l'on menera par *B* la droite *BC* parallele à *AF* qui rencontrera l'Hyperbole en *C*, & le point *B* ſera l'origine de la courbe qu'il faut décrire; & ayant pris ſur *AQ* un autre point quelconque *Q*, l'on menera par *Q* la droite *QN* parallele à *AF* qui rencontrera l'Hyperbole en *N*. Cela fait, on prendra ſur *DS* le point *V*, tel qu'ayant mené *VP* parallele à *AD*, l'eſpace *ADVP* ſoit égal à l'eſpace hyperbolique *BCNQ*; & le point *M* où les droites *NQ*, *VP*, étant prolongées, ſe couperont, ſera à la courbe cherchée.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené du point m pris ſur la courbe BM infiniment proche de M, les droites mqn, mpu, & du point N, la petite droite NI parallele à AQ; QN étant, $ſ$; AQ, y; Qq, ou NI ſera dy, & partant le petit rectangle $QNIq = ſdy$: mais comme le petit triangle NIn a tous ſes côtez infiniment petits, il doit être nul par raport au petit rectangle $QNIq$; c'eſt pourquoi $QNIq = QNnq = ſdy = \frac{aady}{y}$, en remettant pour $ſ$ ſa valeur $\frac{aa}{y}$. De même AD, ou PV étant, a; & AP, x; Pp ſera, dx; & partant le petit rectangle $PVup = adx$. Mais (Conſt.) $BCNQ = ADVP$, & $BCnq = ADup$; donc $QNnq = PVup$, ou en termes algébriques $\frac{aady}{y} = adx$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

16. IL eſt clair que la courbe BMm a pour aſymptote ſon axe AP: car l'eſpace Hyperbolique $BAFGC$ étant infini, le rectangle $ADVP$ ne lui peut jamais être égal, à moins qu'on ne ſuppoſe le point P infiniment éloigné de A.

COROLLAIRE II.

17. L'EQUATION $ydx = ady$, où l'Hypothéſe donne $dy . dx :: y . a$, d'où l'on voit que ſi l'on ſuppoſe que dx exprime une quantité conſtante, le raport de dx à a ſera un raport conſtant; & partant celui de dy à y le ſera auſſi; c'eſt pourquoi ſi l'on prend ſur l'axe AP tant de parties égales qu'on voudra PC, CD, DE, &c. chacune $= dx$, & qu'on mene par les points P, C, D, E, &c. des perpendiculaires PM, CF, DG, EH, &c. ces perpendiculaires

perpendiculaires seront continuellement proportionnelles : car ayant mené par les points M, F, G, &c. les droites MI, FK, GL, &c. l'on aura par l'Hypothese PM (y). IF (dy) :: CF. KG ; donc *componendo*, PM. $PM+IF$ :: CF. $CF+KG$, c'est-à-dire, PM. CF :: CF. DG. Par la même raison CF. DG :: DG. EH, &c. De sorte que si les parties de l'axe PC, PD, PE, &c. ou PN, PO, PQ, &c. prises sur l'axe AP en commençant d'un point quelconque P, croissent ou diminuent en proportion arithmétique, les perpendiculaires correspondantes CF, DF, EH, &c. ou NR, OS, QV, &c. croîtront, ou diminueront en proportion geométrique ; c'est pourquoi si l'on prend PC pour l'unité de la progression arithmétique PC, PD, PE, &c. & PM pour l'unité de la progression geométrique PM, CF, DG, EH, les termes PC (1), PD (2), PE (3), &c. de la progression arithmétique, seront les logarithmes des termes correspondans CF, DG, EH, &c. de la progression geométrique, qu'on appelle *Nombres*, & 0, le Logarithme de l'unité PM. C'est à cause de cette proprieté que la courbe BM a été nommée *Logarithmique*.

COROLLAIRE III.

18. LA perpendiculaire PM étant nommée 1, si l'on nomme CF, x ; DG sera, x^2 ; EH, x^3 ; &c. car à cause de la progression geométrique, l'on a $PM (1) . CF (x)$ :: $CF (x) . DG = \frac{x^2}{1} = x^2$; $CF (x) . DG (x^2)$ :: $DG (x^2) . EH = x^3$, &c. Par la même raison NR sera, $\frac{1}{x}$; OS, $\frac{1}{x^2}$; QV, $\frac{1}{x^3}$; &c. car $CF (x) . PM (1)$ :: $PM (1) . NR = \frac{1}{x}$; $PM (1) . NR \left(\frac{1}{x}\right)$ :: $NR \left(\frac{1}{x}\right) . OS = \frac{1}{x^2}$; $NR \left(\frac{1}{x}\right) . OS \left(\frac{1}{x^2}\right)$ :: $OS \left(\frac{1}{x^2}\right) . QV = \frac{1}{x^3}$; &c. Or

puisque $PC = 1$, $PD = 2$, $PE = 3$, &c. PN sera $= -1$, $PO = -2$, $PQ = -3$, *&c.* donc en rangeant ces expressions des perpendiculaires, & celles des parties de l'axe AP, de maniere que l'expression de PQ réponde à celle de QV; celle de PO, à celle de OS, &c. l'on aura les deux progressions suivantes, qui se répondront terme à terme, & chaque terme de la progression arithmétique, sera le logarithme de celui qui lui répond dans la progression geométrique.

$$\text{Prog. geom. } \frac{1}{x^3} \,.\, \frac{1}{x^2} \,.\, \frac{1}{x} \,.\, 1 \,.\, x^1 \,.\, x^2 \,.\, x^3, \text{ \&c.}$$

$$\text{ou } x^{-3} \quad x^{-2} \quad x^{-1} \qquad 1 \,.\, x^1 \; x^2 \; x^3, \text{ \&c.}$$

$$\text{Prog. arith. } -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3, \text{ \&c.}$$

COROLLAIRE IV.

19. D'OU l'on voit, 1°. Que les exposans des puissances en sont les logarithmes. 2°. Que la somme de deux logarithmes, est le logarithme du produit des deux nombres qui leur répondent. Ainsi 5 ($= 3 + 2$) est le logar. de x^5 ($= x^3 \times x^2 = x^{3+2}$). 3°. Que la différence de deux logarithmes, est le logarithme du quotient des deux nombres qui leur répondent. Ainsi 2 ($= 5 - 3$) est le logarithme de x^2 ($= \frac{x^5}{x^3} = x^{5-3}$). 4°. Que le double, le triple, &c. d'un logarithme, est le logarithme du quarré, du cube, &c. du nombre correspondant. Ainsi 4 ($= 2 + 2$, est le logarithme de x^4) $= x^2 \times x^2 = x^{2+2}$. 5°. Que la moitié, le tiers, &c. d'un logarithme, est le logarithme de la racine quarrée, cube, &c. Ainsi 3 (égal à la moitié de 6,) est le logarithme de $x^3 = \sqrt{x^6} = x^{\frac{6}{2}}$.

COROLLAIRE V.

20. IL ſuit auſſi des deux Corollaires précédens que le logarithme de la racine d'une puiſſance multipliée par l'expoſant de cette puiſſance ſera le logarithme de la même puiſſance, & qu'on peut par conſéquent changer une puiſſance, ou une autre quantité quelconque en ſon logarithme, & au contraire : car en ſuppoſant les mêmes choſes que dans les Corollaires précédens $PC = 1$, étant le logarithme de $CF = x$; $PD = 2$ ($= 2\,PC = 2$ fois le Logarithme de $CF = x$), ſera le Logarithme de $DG = x^2$; $PE = 3$ ($3\,PC =$ trois fois le Logarithme de $PC = x$), ſera le Logarithme de x^3 : ce qu'on exprime en cette ſorte : $L : DG$ (L ſignifie Logarithme) $= 2\,LCF$, ou $L : x^2 = 2\,Lx$; $L : EH = 3\,LCF$, ou $L : x^3 = 3\,Lx$. De même, $L : OS$ ($= -2\,PC$) $= -2\,LCF$, ou

$L : \frac{1}{x^2}$, ou $L : x^{\overline{-2}} = -2\,Lx$; & en general $L : x^m = m\,Lx$.

De même $L : ax = La + Lx$; $L : \frac{ax}{y} = La + Lx - Ly$;

$L : ax - xx = La + x + Lx$; $L : aa - xx = La + x + La - x$; $L : axx - x^3 = 2\,Lx + La - x$.

Il n'eſt pas plus difficile de changer les quantitez logarithmiques en leurs nombres correſpondans : car il n'y a qu'à les élever à la puiſſance exprimée par leurs logarithmes, & multiplier celles qui ſont jointes par le ſigne $+$, & diviſer par celles qui ont le ſigne $-$. Ainſi $N : 3\,Lx$ (N. ſignifie Nombre) $= x^3$; $N : mLx = x^m$; $N : La + Lx - Ly = \frac{ax}{y}$; $N : 2Lx + La + x - 2\,La = \frac{axx + x^3}{aa}$.

Il en eſt ainſi des autres.

Parce que les logarithmes des quantitez égales, ſont

aussi égaux ; il suit qu'on peut changer les équations ordinaires en équations logarithmiques, & au contraire. Ainsi $yy = aa - xx$, qui est une équation au cercle, se change en celle-ci, $2Ly = La + x + La - x$, qui est une équation logarithmique. De même $2Ly = La + Lx$, qui est une équation logarithmique, se change en celle-ci $yy = ax$ qui est une équation à la Parabole. Il en est ainsi des autres.

PROPOSITION V.

PROBLÊME.

FIG. 120. 21. *Un cercle* APB, *dont le centre est* C, *étant donné, il faut décrire la courbe* AMD *qui fait avec tous les rayons* CMP, Cmp, *un angle égal à un angle donné.*

Il est clair que si l'on suppose que le rayon Cp soit infiniment proche de CP, & que l'on décrive du centre C, par m le petit arc mR, le petit triangle MRm pourra être regardé comme rectiligne ; c'est pourquoi ayant mené du centre C, la droite CT perpendiculaire à CP, & prolongé le petit côté Mm jusqu'à ce que le prolongement rencontre CT en T : la droite MmT, qui sera une tangente au point M, la perpendiculaire CT, qui sera la soûtangente, & la partie CM du rayon CP formeront le triangle rectangle MCT semblable au petit triangle MRm, & qui sera toujours semblable à lui-même, à cause de l'angle CMm, ou CMT égal à un angle donné. Supposons donc que le raport constant de MC à CT soit comme m à n.

Ayant nommé la donnée CA, ou CP, a ; l'arc indéterminé AP, x ; PM, y ; Pp sera dx ; MR, dy, & CM, $a - y$. Or à cause des secteurs semblables CPp, CRm, l'on aura $CP\ (a) . CM\ (a - y) :: Pp\ (dx) . MR = \frac{adx - ydx}{a}$; & à cause des triangles semblables MRm,

MCT, l'on a $MR\,(dy)\,.\,RM\,(\frac{adx-ydx}{a})::MC\,(a-y)$ $.\,CT=\frac{aadx-2aydx+yydx}{ady}$: mais $m\,.\,n::a-y\,(MC)\,.$ $\frac{aadx-2aydx+yydx}{adx}\,(CT)$; donc $n\times\overline{a-y}=m\times$ $\overline{\frac{aadx-2aydx+yydx}{ady}}$, ou $n=m\times\overline{\frac{aax-ydx}{ady}}$, en diviſant chaque membre par $a-y$, ou (n°. 14.) $\frac{nady}{a-y}=mdx$, qui donne cette conſtruction.

Ayant ſuppoſé $m=z$, qui eſt une équation à la ligne droite, & $\frac{na}{a-y}=u$, qui eſt une équation à l'Hyperbole, on prolongera CA en F, en ſorte que $AF=m=z$, l'on menera par A la droite GH perpendiculaire à CA, & ayant nommé AG, x, & AH, u; l'on conſtruira l'Hyperbole HOS entre les aſympotes CA & CB parallele à AH. D'un point quelconque O pris ſur l'Hyperbole, ayant mené OI parallele à AH, l'on prendra ſur AG le point G, en ſorte qu'ayant mené GK parallele à AF, le rectangle $AGKF$ ſoit égal à l'eſpace Hyperbolique $AIOH$, & ayant fait l'arc $AP=AG$, & mené le rayon CP, l'on décrira du centre C par I l'arc IM, qui coupera CP au point M qui ſera à la courbe cherchée.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené un rayon Cp infiniment proche de CP, qui coupera la courbe au point m; décrit du centre C par m l'arc mL; mené LQ parallele à IO, fait $Ag=Ap$, & mené gk parallele à GK. Par la conſtruction, l'eſpace $AgkF$

eſt égal à l'eſpace Hyperbolique $ALQH$, & $AGKF = AIOH$; donc $GgkK = ILQO$: mais $GgkK = zdx = mdx$, & $ILQO = udy = \frac{nady}{a-y}$; donc $mdx = \frac{nady}{a-y}$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

22. IL eſt clair 1°. Que la courbe AMD ne paſſera point au centre C du cercle, puiſqu'elle coupe tous les rayons à angles égaux. 2°. Qu'elle fera une infinité de tours autour du même centre : car lorſque AG ſera égale à la circonférence $APBA$, le point M de la courbe ſera ſur le rayon CA : & comme l'eſpace Hyperbolique $HACBS$ eſt infini, avant que de l'avoir épuiſé, il faudra prendre ſur AG prolongée à l'infini, une infinité de fois $APBA$; c'eſt pourquoi la courbe AMD rencontrera une infinité de fois le rayon CA, & fera par conſéquent une infinité de tours autour du centre C.

COROLLAIRE II.

23. ON tire de l'équation que l'on vient de conſtruire $mdx . ndy :: a . a - y$; d'où il ſuit que ſi l'on prend dx pour conſtante, ou ce qui revient au même, ſi les parties AP croiſſent également en devenant Ap, ou, croiſſent en proportion arithmétique, les appliquées PM, ou CM, ſeront (n°. 17.) en proportion geométrique; c'eſt pourquoi cette courbe eſt nommée *Logarithmique Spirale*.

REMARQUE.

24. SI l'on changeoit l'équation précédente $mdx = \frac{nady}{a-y}$ en celle-ci $adx = \frac{naady}{ma - my}$, en diviſant par m, & en mul-

tipliant par a, ou $adx = \frac{aady}{a-y}$, en ſuppoſant $m = n$; après avoir conſtruit l'Hyperbole ſelon l'une de ces deux dernieres équations, on conſtruiroit la courbe *AMD* en prenant le ſecteur *ACP* égal à la moitié de l'eſpace hyperbolique *HAIO*, & le cercle décrit de *C* par *I*, couperoit *CP* au point *M* qui ſeroit à la courbe *AMD*; & cette courbe ſeroit encore une Spirale logarithmique, qui auroit les mêmes propriétez que la précédente: car (Conſt.) le ſecteur $ACP = \frac{1}{2} AIOH$, & $ACp = \frac{1}{2} \times ALQH$; donc $PCp = \frac{1}{2} ILQO$: mais $PCp = \frac{1}{2} adx$, & $\frac{1}{2} ILQO = \frac{1}{2} \times \frac{naady}{ma - my}$, ou $\frac{1}{2} \times \frac{aady}{a-y}$; donc $adx = \frac{naady}{ma - my}$, ou $\frac{aady}{a-y}$.

La conſtruction de la courbe du Problême précédent ne dépend que de la quadrature de l'Hyperbole : mais celle des courbes de celui-ci dépend de la quadrature de l'Hyperbole, & de celle du cercle tout enſemble.

PROPOSITION VI.

PROBLÊME.

25. UN *demi cercle* ADB, *dont le diametre eſt* AB, *&* *le centre* C, *étant donné; il faut trouver un point* M *hors du demi cercle, d'où ayant abbaiſſé ſur* AB *la perpendiculaire* MP *qui rencontrera la circonférence* ADB *en* D; *la partie* MD *de la perpendiculaire* MP *ſoit égale à l'arc* BD, *& que le rectangle* BP × PM *ſoit égal au quarré du demi diametre* BC. Fig. 121.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, & nommé la donnée *AC*, ou *CB*, *a*; & les indéterminées *BP*, *x*; *PM*,

y; MD, s; l'arc BD, u; AP sera $2a - x$; l'on aura par la premiere condition du Problême. $s = u$, qui est (n°. 8.) une équation à la roulette à bâse droite, dont le point décrivant est sur la circonférence du cercle générateur; & par la seconde condition, l'on aura $xy = aa$, qui est une équation à l'Hyperbole par raport à ses asymptotes.

Pour construire l'équation à la roulette $s = u$; ayant supposé que le point B de la circonférence BDA, soit le point générateur, & mené AT perpendiculaire à AB, on fera rouler le demi cercle BDA sur la droite AT qui le touche en A, & le point B décrira par son mouvement la roulette BMT.

Pour construire l'équation à l'Hyperbole $xy = aa$, on menera le rayon CF parallele à AT, & l'on décrira (Art. 14.) par le point F, l'Hyperbole FM qui coupera la roulette BMT au point cherché M.

DÉMONSTRATION.

AYANT mené par le point M la droite MP perpendiculaire à AB, sa partie MD, comprise entre le point M, & la circonférence BDA, sera par la proprieté de la roulette égale à l'arc BD, ce qui est en termes algebriques $s = u$.

Et par la propriété de l'Hyperbole (Art. 14.) le rectangle $BP \times PM = BC^2$, ce qui est en termes algebriques $xy = aa$. C. Q. F. D.

REMARQUE.

PARCEQUE la roulette BMT est (n°. 12.) une courbe méchanique; il suit que la construction de ce Problême est aussi méchanique, quoique l'Hyperbole FM soit une courbe geométrique.

L'on

L'on remarquera aussi que la construction des Problêmes méchaniques ne differe point de celle des Problêmes geométriques, lorsqu'on les construit par le moyen de deux équations indéterminées.

L'on pourroit trouver une équation différentielle pour la roulette, & la décrire par les régles expliquées dans la Proposition quatriême : car ayant mené par le point p, pris infiniment proche de P, la droite pSm parallele à PDM, par les points D & M les petites droites DR, MI paralleles à AB; MK parallele à DS, ou à la touchante en D du cercle BDA; & le rayon CD. En nommant encore BP, x; PM, y; PD, z; & DM, s; BD, u; Pp, ou DR, ou MI sera dx; RS, dz; IM, dy; KM, ds; or puisque l'arc $BD = DM$, & $BS = Sm$, l'on aura $DS = Km$, ou $ds = du$.

A cause des paralleles DR, MI & DS, MK, les petits triangles DRS, MIK seront semblables & égaux; & partant $RS = dz = IK$; donc dy ($= IM = IK + Km = dz + ds$) $= dz + du$, en mettant pour ds sa valeur du.

Mais les triangles rectangles DRS, DPC étant semblables, puisque les angles RDS, PDC sont tous deux le complément de l'angle RDC; l'on aura $DP\ (z) . PC$

$(a - x) :: DR\ (dx) . RS = \frac{adx - xdx}{z} = dz$, & $DP\ (z)$.

$DC\ (a) :: DR\ (dx) . DS = \frac{adx}{z} = du$; mettant donc

dans l'équation précédente $dy = dz + du$, en la place de

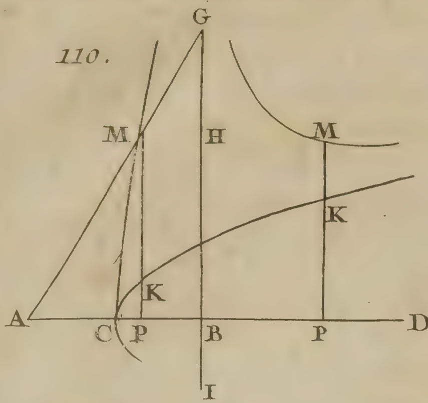
dz & du, leurs valeurs $\frac{adx - xdx}{z}$, & $\frac{adx}{z}$, l'on aura $dy =$

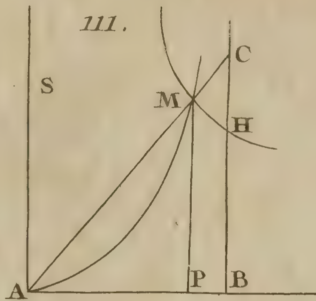
$\frac{2adx - xdx}{z}$.

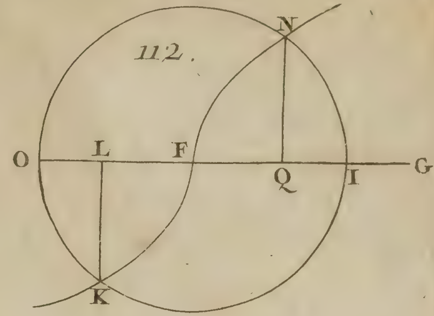
Enfin par la proprieté du cercle, l'on a $AP \times PB = PD^2$, ou en termes algebriques $2ax - xx = zz$; donc $z = \sqrt{2ax - xx}$, & mettant cette valeur de z dans l'équation $dy = \frac{2adx - xdx}{z}$, elle se changera en celle-ci $dy = \frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$, qui est une équation différentielle, où il n'y a que deux indéterminées, & leurs différences.

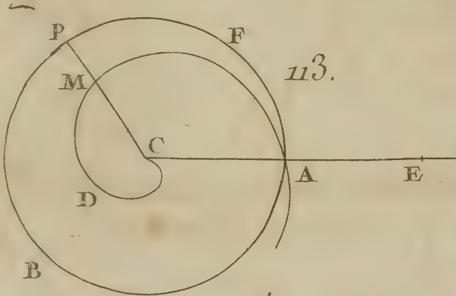
L'on décrira (nº. 14. & 15.) par le moyen de cette équation, la roulette *BMT*, dont l'intersection *M* avec l'Hyperbole *FM* résoudra le Problême proposé.

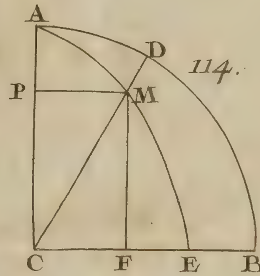
FIN.

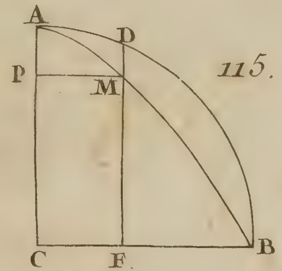

110.
G
M
H
M
K
K
A
C
P
B
P
D
I

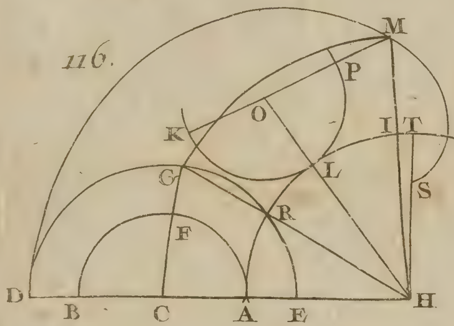

111.
S
C
M
H
A
P
B

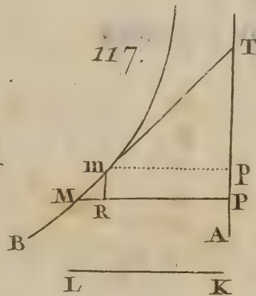

112.
N
O
L
F
Q
I
G
K

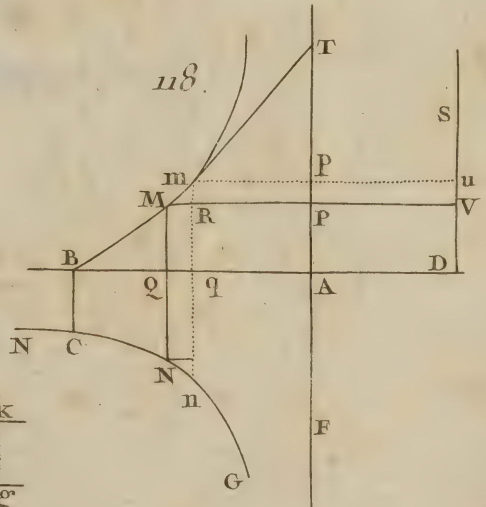

113.
P
F
M
C
A
E
D
B

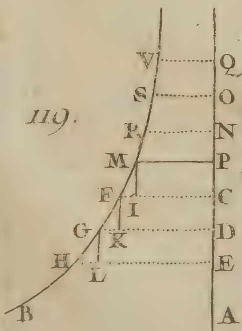

114.
A
D
P
M
C
F
E
B

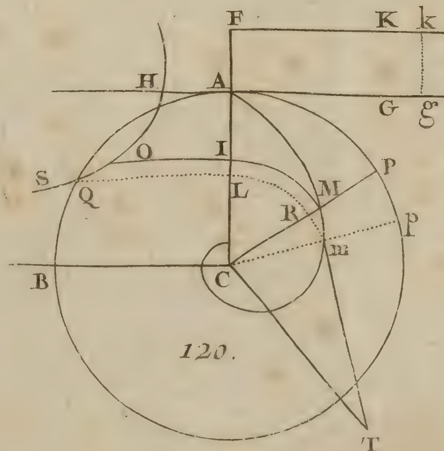

115.
A
D
P
M
C
F
B

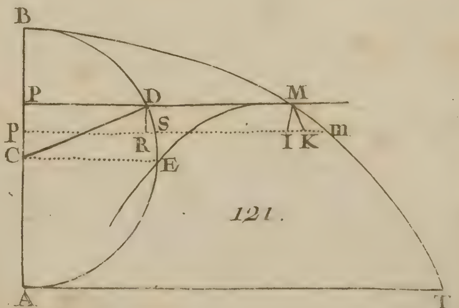

116.
M
P
K
O
I
T
G
L
S
F
R
D
B
C
A
E
H

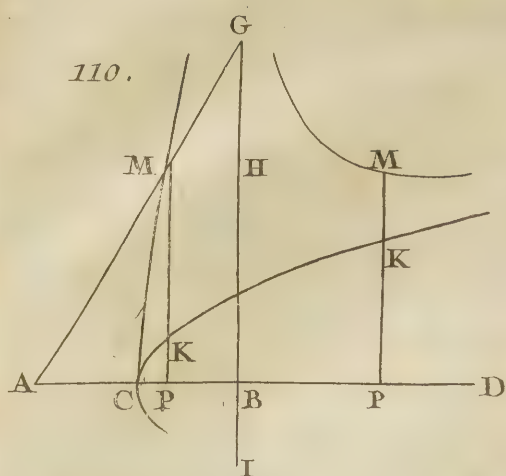

117.
T
m
p
M
R
P
B
A
L
K

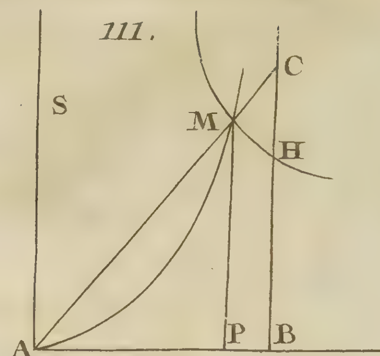

118.
T
S
p
u
m
M
R
P
V
B
D
Q
q
A
N
C
N
n
F
G

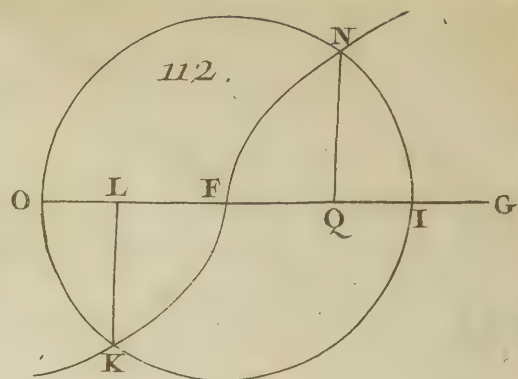

119.
V
Q
S
O
R
N
M
P
F
I
C
G
K
D
H
L
E
B
A

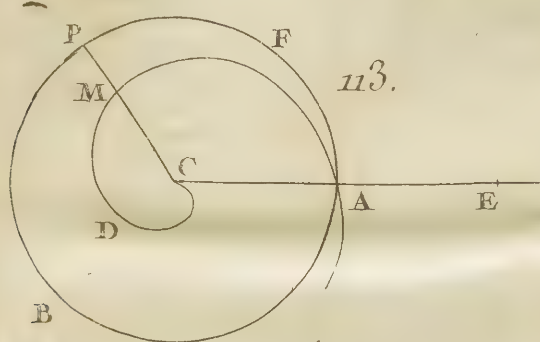

F
K
k
H
A
G
g
O
I
S
Q
L
M
P
R
p
m
B
C
120.
T

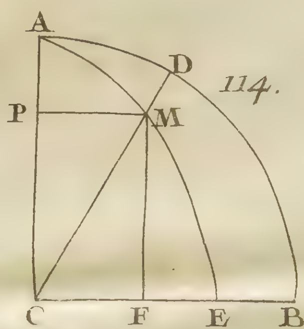

B
P
D
M
p
S
I
K
m
C
R
E
121.
A
T

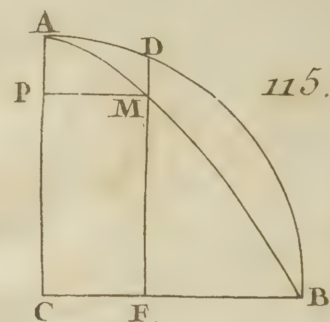

110.
G
M
H
M
K
K
A
C
P
B
P
D
I

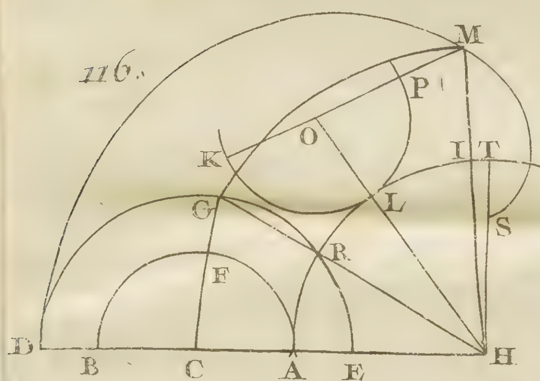

111.
S
C
M
H
A
P
B

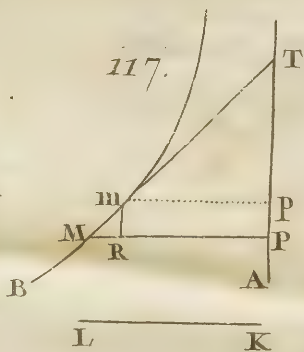

112.
N
O
L
F
Q
I
G
K

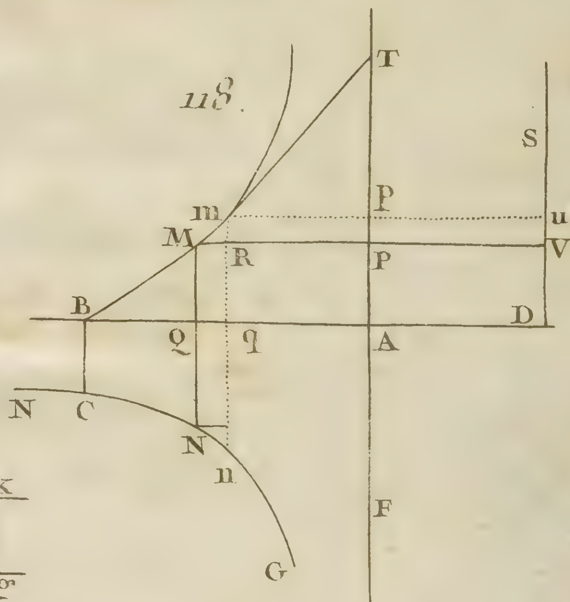

113.
P
F
M
C
A
E
D
B

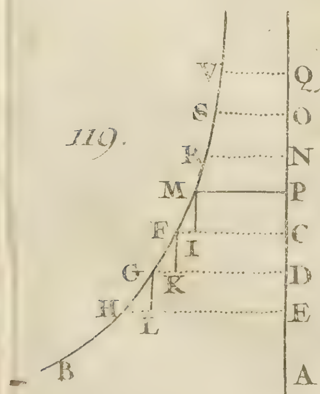

114.
A
D
P
M
C
F
E
B

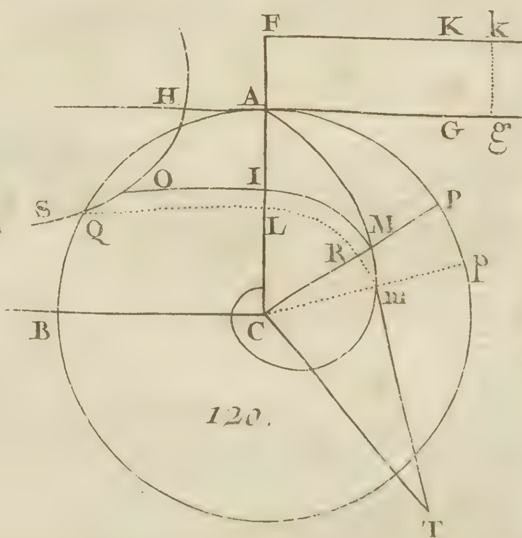

115.
A
D
P
M
C
F
B

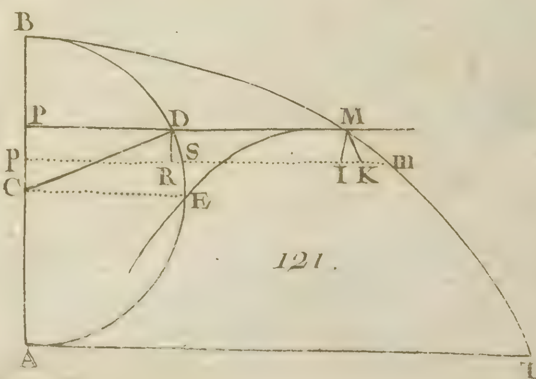

116.
M
P
O
K
I
T
L
G
S
F
R
D
B
C
A
E
H


117.
T
m
p
M
R
P
B
A
L
K


118.
T
S
p
m
u
M
R
P
V
B
D
Q
q
A
N
C
N
n
F
G


119.
V
Q
S
O
N
M
P
F
C
I
G
K
D
H
L
E
B
A

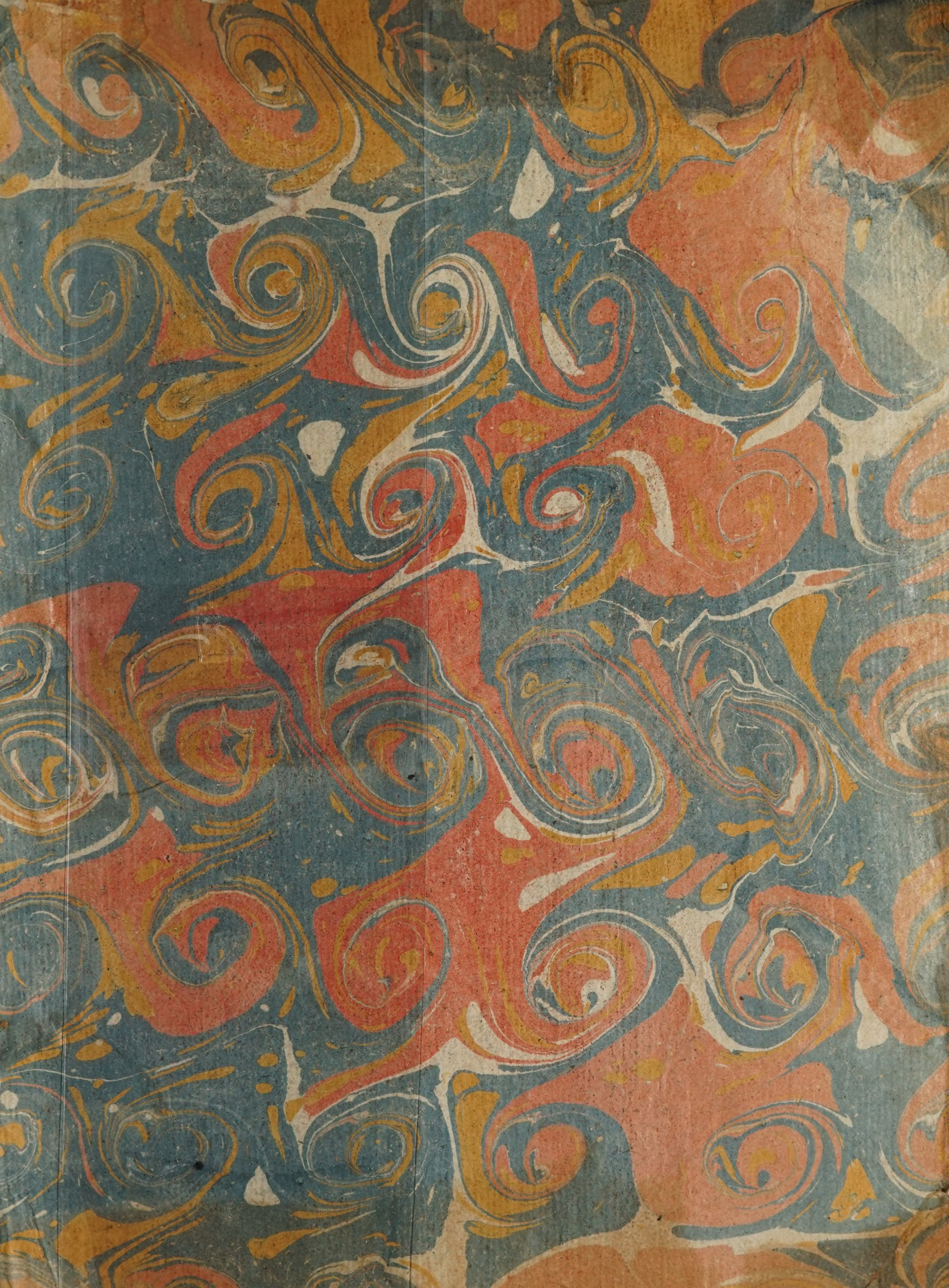

F
K
k
H
A
G
g
O
I
S
Q
L
M
P
R
p
m
B
C
120.
T


B
P
D
M
p
S
R
I
K
m
C
E
121.
A
T

12/-

M. ___
Sa. ___
T. ___
L. ___






3 0112 077512231